НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
март–апрель 2022 Том 22 № 2 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
March–April 2022 Vol. 22 No 2 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245
УДК 62-50

Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел

Роман Оморович Оморов[1], Таалайбек Абакирович Акунов[2]✉, Акылбек Орузбаевич Айдралиев[3]

[1,2,3] Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика

[1] romano_ip@list.ru, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323
[2] takunov@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0923-9777
[3] aidraliev@outlook.com, https://orcid.org/0000-0003-2889-3202

Аннотация
Рассмотрена задача исследования чувствительности процессов управления к вариации параметров. Для решения задачи использован аппарат траекторной чувствительности, применение которого совместно с методом пространства состояний позволило построить модели чувствительности. На основе моделей определены эллипсоидные оценки функций траекторной чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем в форме мажорант и минорант. Выполнены вычисления с использованием обобщенного сингулярного разложения матриц, составленных из функций траекторной параметрической чувствительности. Полученные эллипсоидные оценки в силу содержательных возможностей обобщенного сингулярного разложения матриц обладают свойством минимальной достаточности. Метод оценки дает возможность с помощью левого сингулярного базиса, соответствующего экстремальным обобщенным сингулярным числам, выделить в пространствах состояния, выхода и ошибки подпространства, которые характеризуются в каждый момент времени наибольшим и наименьшим по норме дополнительным движением. Правый сингулярный базис позволяет в пространстве параметров выделить подпространства, порождающие наибольшее и наименьшее по норме дополнительное движение. Предложенный подход решает проблему «оптимального номинала», то есть проблему выбора номинального значения вектора параметров агрегатов объекта управления, доставляющих многомерному управляемому процессу наименьшее значение эллипсоидных оценок функций траекторной чувствительности, а также осуществить сравнение протекания многомерных управляемых процессов по эллипсоидным оценкам траекторной параметрической чувствительности.

Ключевые слова
линейная многомерная система, эллипсоидная оценка, траекторная параметрическая чувствительность, модель чувствительности, обобщенное сингулярное разложение

Ссылка для цитирования: Оморов Р.О., Акунов Т.А., Айдралиев А.О. Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 2. С. 239–245. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245

Elliposoidal estimates of trajectory sensitivity of multi-dimensional processes based on generalized singular values problems

Roman O. Omorov[1], Taalaibek A. Akunov[2]✉, Akylbek O. Aidraliev[3]

[1,2,3] Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic

[1] romano_ip@list.ru, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323
[2] takunov@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0923-9777
[3] aidraliev@outlook.com, https://orcid.org/0000-0003-2889-3202

Abstract
The problem of studying the sensitivity of control processes to parameter variations is considered. To solve the problem, the trajectory sensitivity apparatus was used, the use of which, together with the state-space method, made it possible to construct sensitivity models. Based on the models, ellipsoidal estimates of the trajectory sensitivity functions in terms of the state, output, and error of linear multidimensional continuous systems in the form of majorants and minorants are determined. Calculations are performed using the generalized singular value decomposition of matrices composed of trajectory parametric sensitivity functions. The resulting ellipsoidal estimates, due to the meaningful possibilities of the generalized singular value decomposition of matrices, have the property of minimal sufficiency. The estimation method makes it possible, using the left singular basis corresponding to the extremal generalized singular values, to determine subspaces in the state, output, and error spaces that are characterized at each moment of time by the largest and smallest additional motion in terms of the norm. The right singular basis allows us to determine subspaces in the parameter space that generate the largest and smallest additional motion in the norm. The proposed approach solves the problem of "optimal nominal", that is, the problem of choosing the nominal value of the parameter vector of the plant units that provide the multidimensional controlled process with the smallest value of the ellipsoidal estimates of the trajectory sensitivity functions, as well as to compare the flow of multidimensional controlled processes according to the ellipsoidal estimates of the trajectory parametric sensitivity.

Keywords
linear multivariable system, ellipsoidal estimate, trajectory parametric sensitivity, sensitivity model, generalized singular value decomposition

For citation: Omorov R.O., Akunov T.A., Aidraliev A.O. Elliposoidal estimates of trajectory sensitivity of multi-dimensional processes based on generalized singular values problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 239–245 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-239-245

Введение

Аппарат траекторной чувствительности [1–3] широко используется в фазе становления теории чувствительности динамических систем как самостоятельной ветви общей теории систем управления. В сочетании с техникой метода пространства состояний аппарат строит модели чувствительности, выполняющие функции наблюдателя нормированного дополнительного движения динамической системы, порожденного вариациями параметров последней относительно их номинальных значений. Аппарат стал идейной основой метода сравнительной чувствительности Круца–Перкинса [4]. Однако в последнее время работы по теории параметрической чувствительности управляемых процессов, использующие методологию траекторной чувствительности, появляются, за некоторым исключением [5], достаточно редко в отечественных и зарубежных научных работах. Тем не менее процесс алгебраизации современной теории управления обнаружил новые возможности аппарата траекторной чувствительности, позволившие сконструировать скалярные оценки дополнительного движения многомерных управляемых процессов, названных эллипсоидными [6].

Постановка задачи

Основная задача исследования чувствительности [1, 2] — изучение свойств дополнительных движений и определение их связи со свойствами исходной системы. Под дополнительным движением $\Delta\boldsymbol{\varphi}(t, \Delta\mathbf{q})$ при вариации параметров $\mathbf{q}$ относительно номинального значения $\mathbf{q}_0$ при условии, что $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}$, понимается вариация вида:

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}) \stackrel{\Delta}{=} \Delta\boldsymbol{\varphi}(t, \Delta\mathbf{q}) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varphi}(t),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ соответствует векторам: состояния $\mathbf{x}$, выхода $\mathbf{y}$ и ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$. Согласно классической теории чувствительности [1, 2] первым приближением для дополнительного движения является выражение $\Delta\boldsymbol{\varphi}(t, \Delta\mathbf{q}) = \boldsymbol{\Theta}(t)\Delta\mathbf{q}$, где Δ — приращение, t — имеет смысл времени, $\mathbf{q}$ — вектор параметров, $\boldsymbol{\Theta}(t)$ — матрица, составленная из соответствующих функций чувствительности.

В силу многомерности задача исследования параметрической чувствительности векторных процессов достаточно сложна и связана с рассмотрением множества вариантов дополнительных движений.

Отметим, что основная задача — оценка параметрической чувствительности континуума траекторий многомерных систем управления в виде соотношения для векторных норм по состоянию, выходу и ошибке. С помощью соотношения выполнена оценка подпространств максимальной и минимальной чувствительности. С этой целью введены эллипсоидные оценки функций траекторной чувствительности для отношения евклидовых векторных норм δ в виде скалярных мажорант $\lambda_{\mathbb{Q}M}(t)$ и минорант $\lambda_{\mathbb{Q}m}(t)$ этих функций в форме

$$\lambda_{\mathbb{Q}m}(t) \leq \delta(t) \leq \lambda_{\mathbb{Q}M}(t).$$

Конструирование оценок осуществлено с использованием обобщенного сингулярного разложения [7] соответствующих матриц траекторной чувствительности [8].

Подход позволяет решить проблему выбора номинального значения вектора параметров агрегатов объекта управления, доставляющих многомерному управляемому процессу наименьшее значение эллипсоидных оценок функций траекторной чувствительности, выполнить сравнение протекания многомерных управляемых процессов по эллипсоидным оценкам траекторной параметрической чувствительности.

Схема использования обобщенного сингулярного разложения матриц

Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению вида

$$\boldsymbol{\kappa}(\tau) = \boldsymbol{\Pi}(\tau)\boldsymbol{\chi}(\tau = 0),\ \forall\tau, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$ — матрица, связывающая вектор $\boldsymbol{\kappa}(\tau)$, зависящий от переменной τ, с вектором $\boldsymbol{\chi}(\tau = 0) = \boldsymbol{\chi}(0)$, стационарным по τ. Тогда могут быть записаны оценочные неравенства вида

$$\alpha_m(\tau) \le \|\boldsymbol{\kappa}(\tau)\|/\|\boldsymbol{\chi}(0)\| \le \alpha_M(\tau),\ \forall\tau,$$

где $\alpha_m(\tau)$, $\alpha_M(\tau)$ — экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\boldsymbol{\Pi}(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$ (1), однозначно определяющие на матрице правых сингулярных векторов $\mathbf{V}(\tau)$ те из них, которые на сфере $\|\boldsymbol{\chi}(0)\| = \gamma = \text{const}$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида с полуосями $\gamma\alpha_M(\tau)$ и $\gamma\alpha_m(\tau)$ соответственно, где γ — численное значение векторной нормы $\|\boldsymbol{\chi}(0)\|$.

Пусть задача исследования многомерных управляемых процессов, сведенная к (1), дополнена векторно-матричным соотношением

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau) = \boldsymbol{\Psi}(\tau)\boldsymbol{\chi}(\tau),$$

где матрица $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$ связывает векторы $\boldsymbol{\zeta}(\tau)$ и $\boldsymbol{\chi}(\tau)$ в форме линейной алгебраической задачи.

Пусть при этом в задаче исследования многомерных управляемых процессов представляет интерес изучение поведения отношения

$$\delta_{\kappa\zeta}(\tau) \overset{\Delta}{=} \|\boldsymbol{\kappa}(\tau)\|/\|\boldsymbol{\zeta}(\tau)\|$$

евклидовых векторных норм. Тогда в силу обобщенного отношения Релея [9–12], которое является скалярной формой обобщенной задачи собственных значений, оказываются справедливыми оценочные неравенства

$$\lambda_{\Pi\Psi m}(\tau) \le \delta_{\kappa\zeta}(\tau) = \|\boldsymbol{\kappa}(\tau)\|/\|\boldsymbol{\zeta}(\tau)\| \le \lambda_{\Pi\Psi M}(\tau), \quad (2)$$

где $\lambda_{\Pi\Psi m}(\tau)$ и $\lambda_{\Pi\Psi M}(\tau)$ — скалярные оценки при условии, что $\boldsymbol{\Psi}^T(\tau)\boldsymbol{\Psi}(\tau)$, $\forall\tau$ невырожденная матрица, вычисляются для любых τ с помощью решения обобщенного характеристического уравнения

$$\det(\mu(\tau)\boldsymbol{\Psi}^T(\tau)\boldsymbol{\Psi}(\tau) - \boldsymbol{\Pi}^T(\tau)\boldsymbol{\Pi}(\tau)) = 0$$

так, что

$$\lambda_{\Pi\Psi}(\tau) = |\mu^{1/2}(\tau)|. \quad (3)$$

Представим матрицы задач $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$ и $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$ в форме

$$\boldsymbol{\Pi}(\tau) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\pi}(\tau),$$
$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \mathbf{R}\boldsymbol{\pi}(\tau),$$

где $\boldsymbol{\pi}(\tau)$ — произвольная квадратная матрица, тогда оценочные неравенства (2) становятся стационарными по τ и принимают вид

$$\lambda_{QRm} \le \delta_{\kappa\zeta}(\tau) = \|\boldsymbol{\kappa}(\tau)\|/\|\boldsymbol{\zeta}(\tau)\| \le \lambda_{QRM},\ \forall\tau. \quad (4)$$

Экстремальные оценки $\lambda_{QRm}(\tau)$, $\lambda_{QRM}(\tau)$ в формуле (4) вычисляются при условии, что матрица $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ обратима, с помощью решения обобщенного характеристического уравнения, стационарного по τ

$$\det(\mu\mathbf{R}^T\mathbf{R} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = 0 \text{ при условии, что } \lambda_{QR} = |\mu^{1/2}|.$$

Таким образом, задача сведена к *обобщенной проблеме сингулярных чисел* [7], а оценки вида (2) в силу свойства симметричности матриц $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ могут быть получены с помощью экстремальных элементов алгебраического спектра обобщенных сингулярных чисел матриц $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ с $m \ge n$ и $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{p\times n}$, α_{RQWm}, $\alpha_{RQM} \in \sigma_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{Q}) = \{\alpha_{R1}/\alpha_{Qn}, \ldots, \alpha_{Rn}/\alpha_{Q1}\}$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{R} = diag\{\alpha_{Ri}, i = \overline{1, n}\}$, $\alpha_{Ri} > 0$, $\mathbf{V}^T\mathbf{Q}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{Q} = diag\{\alpha_{Qi}, i = \overline{1, q}\}$, $\alpha_{Qi} > 0$, где $q = \min(p, n)$.

Конструирование эллипсоидных оценок траекторной чувствительности многомерных процессов при внешних конечномерных воздействиях

Утверждение 1. Пусть при произвольном значении параметра $\mathbf{q}$ модель для непрерывного многомерного процесса имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}}(t, q) = \mathbf{F}(q)\mathbf{x}(t, q) + \mathbf{G}(q)\mathbf{g}(t);\\ \mathbf{x}(0, q) = \mathbf{x}(0);\ \mathbf{y}(t, q) = \mathbf{C}(q)\mathbf{x}(t, q),\end{gathered} \quad (5)$$

где $\{\mathbf{F}(q), \mathbf{G}(q), \mathbf{C}(q)\}$ — зависимая от параметра $\mathbf{q}$ тройка матриц состояния, входа и выхода, векторы состояния $\mathbf{x} \in R^n$, выхода $\mathbf{y} \in R^m$ и ошибки $\varepsilon \in R^m$ зависят от вектора параметров $\mathbf{q} \in R^p$ с номинальным значением $\mathbf{q}_0$ так, что $\mathbf{x} = x(t, q)$, $\mathbf{y} = y(t, q)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon(t, q)$.

Для номинального значения вектора параметров $\mathbf{q}_0$ введем обозначение

$$\mathbf{x}(t, q)_{q=q_0} \overset{\Delta}{=} x(t),\ \mathbf{y}(t, q)_{q=q_0} \overset{\Delta}{=} y(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}(t, q)_{q=q_0} \overset{\Delta}{=} \varepsilon(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ — номинальные траектории по состоянию, выходу и ошибке многомерного процесса.

Пусть вектор параметров $\mathbf{q}$ в модели (5) претерпевает вариацию в форме $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}$. Тогда такая вариация $\Delta\mathbf{q}$ параметров порождает в (5) дополнительные движения по состоянию $\mathbf{x}$, выходу $\mathbf{y}$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}$ в формах

$$\Delta\mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}) \overset{\Delta}{=} \Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) - \mathbf{x}(t),$$
$$\Delta\mathbf{y}(t, \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}) \overset{\Delta}{=} \Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{y}(t, \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) - \mathbf{y}(t),$$
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{q}_0, \Delta\mathbf{q}) \overset{\Delta}{=} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta\mathbf{q}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

Тогда для дополнительных движений $\Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q})$ по состоянию $\Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q})$ по выходу и ошибке $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta\mathbf{q})$ получим

$$\Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q}) = \boldsymbol{\Sigma}(t)\Delta\mathbf{q},$$
$$\Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{H}(t)\Delta\mathbf{q},$$
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{E}(t)\Delta\mathbf{q}.$$

В нормах можно записать оценочные неравенства

$$\alpha_{\Sigma\min}(t)\|\Delta\mathbf{q}\| \le \|\Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q})\| \le \alpha_{\Sigma\max}(t)\|\Delta\mathbf{q}\|,\ \forall t; \quad (6)$$
$$\alpha_{H\min}(t)\|\Delta\mathbf{q}\| \le \|\Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q})\| \le \alpha_{H\max}(t)\|\Delta\mathbf{q}\|,\ \forall t; \quad (7)$$
$$\alpha_{E\min}(t)\|\Delta\mathbf{q}\| \le \|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta\mathbf{q})\| \le \alpha_{E\max}(t)\|\Delta\mathbf{q}\|,\ \forall t,$$

где $\alpha_{\Sigma\min}(t)$, $\alpha_{H\min}(t)$, $\alpha_{E\min}(t)$ — минимальные элементы алгебраических спектров сингулярных чисел матриц $\boldsymbol{\Sigma}(t)$, $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{E}(t)$ для любых t; $\alpha_{\Sigma\max}(t)$, $\alpha_{H\max}(t)$, $\alpha_{E\max}(t)$ — максимальные элементы этих же спектров.

Запишем матрицы траекторной чувствительности соответственно по состоянию $\mathbf{x}$, выходу $\mathbf{y}$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{\Sigma}(t) = row\{\sigma_j(t), j = \overline{1, p}\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(t) = row\{\eta_j(t), j = \overline{1, p}\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}(t) = row\{e_j(t), j = \overline{1, p}\}, \quad (10)$$

где σ_j, η_j, e_j — функции траекторной чувствительности многомерного процесса по состоянию $\mathbf{x}$, выходу $\mathbf{y}$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}$ к параметру q_j. □

Доказательство утверждения приведено в работах [8, 13–15].

Очевидно, задача получает полное решение при наличии матриц траекторной чувствительности $\mathbf{\Sigma}(t)$ по состоянию $\mathbf{x}$, $\mathbf{H}(t)$ по выходу $\mathbf{y}$ и $\mathbf{E}(t)$ по ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}$. Конструирование матриц осуществим с помощью модели траекторной чувствительности [2, 3, 5, 8, 13], в основу которых положены следующие утверждения [5, 8, 14].

Утверждение 2. Пусть многомерный управляемый процесс с вектором $\mathbf{x}$ состояния и вектором $\mathbf{y}$ выхода при произвольном значении вектора $\mathbf{q}$ параметров имеет векторно-матричное описание (1). Тогда, используя модели чувствительности процесса (1), можно построить реализации матриц (8)–(10), столбцы $\sigma_j(t) \overset{\Delta}{=} \left.\dfrac{\partial x(t, q)}{\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$; $\eta_j(t) \overset{\Delta}{=} \left.\dfrac{\partial y(t, q)}{\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$; $e_j(t) \overset{\Delta}{=} \left.\dfrac{\partial \varepsilon(t, q)}{\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$, $j = \overline{1, p}$ которых определяются с помощью векторно-матричных соотношений

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{g}(t);\ \tilde{\mathbf{x}}(0) = [0^T, x(0)^T]^T;\\ \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_x\tilde{\mathbf{x}}(t);\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_y\tilde{\mathbf{x}}(t);\ \sigma(t) = \tilde{\mathbf{C}}_\sigma\tilde{\mathbf{x}}(t);\\ \eta(t) = \tilde{\mathbf{C}}_\eta\tilde{\mathbf{x}}(t);\ e(t) = \tilde{\mathbf{C}}_e\tilde{\mathbf{x}}(t),\end{gathered} \quad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = [\sigma^T\ x^T]^T$, $\sigma^T = [\sigma_1^T\ \sigma_2^T \ldots \sigma_p^T]^T$; $\tilde{\mathbf{y}} = [\eta^T\ y^T]^T$, $\eta^T = [\eta_1^T\ \eta_2^T \ldots \eta_p^T]^T$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = [e^T\ \varepsilon^T]^T$, $e^T = [e_1^T\ e_2^T \ldots e_p^T]^T$; $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{p\times p} \otimes \mathbf{F} & \mathbf{F}_q\\ 0 & \mathbf{F}\end{bmatrix}$; $\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix}\mathbf{G}\\ \mathbf{G}_q\end{bmatrix}$; $\mathbf{F}_q = col\{\mathbf{F}_{q_j};\ j = \overline{1, p}\}$; $\mathbf{G}_q = col\{\mathbf{G}_{q_j};\ j = \overline{1, p}\}$; $\mathbf{C}_q = col\{\mathbf{C}_{q_j};\ j = \overline{1, p}\}$; $\tilde{\mathbf{C}}_x = [\mathbf{O}_{n\times pn}\ \ \mathbf{I}_{n\times n}]$; $\tilde{\mathbf{C}}_y = [\mathbf{O}_{m\times pn}\ \ \mathbf{C}]$; $\tilde{\mathbf{C}}_\sigma = [\mathbf{I}_{np\times p}\ \ \mathbf{O}_{pn\times n}]$; $\tilde{\mathbf{C}}_\eta = = [\mathbf{I}_{p\times p} \otimes \mathbf{C}\ \ \mathbf{C}_q]$; $\tilde{\mathbf{C}}_e = [-\mathbf{I}_{p\times p} \otimes \mathbf{C}\ \ 0]$, $\otimes$ — символ кронекеровского произведения матриц; $(\circ)_{q_j} \overset{\Delta}{=} \left.\dfrac{\partial(\circ)(q)}{\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$; $(\circ) \overset{\Delta}{=} \{(\circ)(q)\}_{|\ \mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$; $(\circ)$ — имеет смысл матриц $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$, а также векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$. □

Доказательство утверждения приведено в [8, 14].

Замечание 1. Осуществленная скаляризация задачи анализа чувствительности многомерных управляемых процессов с помощью эллипсоидных оценок траекторной параметрической чувствительности, задающих мажоранту и миноранту дополнительного движения многомерного процесса, порожденного конечной вариацией $\Delta\mathbf{q}$ вектора параметров, с одновременным использованием содержательных возможностей сингулярного разложения матриц траекторной чувствительности позволяет:

1) рассматривать сингулярные числа $\alpha_{\Sigma\min}(t)$, $\alpha_{H\min}(t)$, $\alpha_{E\min}(t)$, и $\alpha_{\Sigma\max}(t)$, $\alpha_{H\max}(t)$, $\alpha_{H\min}(t)$, $\alpha_{E\min}(t)$ матриц $\mathbf{\Sigma}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ в качестве элементов функционального пространства L_T^γ с γ-ичной нормой элемента $\alpha(t)$, при этом наиболее употребительными являются γ-ичные нормы при $\gamma = 2$ и $\gamma \to \infty \|\alpha(t)\|_{\gamma\to\infty} = \sup\limits_{t\in T} \alpha(t)$ так, что последняя из них задает максимальный размер трубки, внутри которой располагается дополнительное движение по состоянию и выходу;
2) осуществить сравнение реализаций регуляторов, образующих с исходным объектом управления многомерный управляемый процесс, по предложенным эллипсоидным оценкам;
3) осуществить решение проблемы «оптимального номинала» — сделать выбор номинального значения $\mathbf{q}_0$ вектора параметров агрегатов объекта управления, доставляющих многомерному управляемому процессу наименьшее значение эллипсоидных оценок функций траекторной чувствительности;
4) с использованием правого сингулярного базиса $\mathbf{V}$ в пространстве R^p параметров выделить подпространство $L\{\mathbf{V}_{\max}\}$, порождающее наибольшее по норме дополнительное движение и подпространство $L\{\mathbf{V}_{\min}\}$, порождающее наименьшее по норме дополнительное движение $\Delta\mathbf{x}(t)$ по состоянию, $\Delta\mathbf{y}(t)$ по выходу и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ по ошибке;
5) с использованием левого сингулярного базиса $\mathbf{U}$ в пространствах R^n и R^m состояния и выхода выделить подпространство $L\{\mathbf{U}_{\max}\}$ и $L\{\mathbf{U}_{\min}\}$, характеризующиеся в каждый момент времени t наибольшим и наименьшим по норме дополнительным движением;
6) осуществить сравнение протекания многомерных управляемых процессов по эллипсоидным оценкам траекторной параметрической чувствительности.

Конструирование эллипсоидных оценок траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел

Рассмотрим особый случай, когда предметом исследования являются относительные дополнительные движения $\delta_x(t)$ и $\delta_y(t)$ по состоянию $\mathbf{x}(t)$ и выходу $\mathbf{y}(t)$, порожденные вариациями параметров и определенные соотношениями

$$\delta_x(t) \overset{\Delta}{=} \|\Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q})\|/\|\mathbf{x}(t)\|,\ \forall t, \quad (12)$$

$$\delta_y(t) \overset{\Delta}{=} \|\Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q})\|/\|\mathbf{y}(t)\|,\ \forall t. \quad (13)$$

При решении поставленной задачи обратим особое внимание на контроль за рангом матриц. Выделим две ситуации применительно к рассматриваемым процессам в системе (1). В первой ситуации задача решается в автономной версии, во второй — в предположении, что внешнее воздействие $g(t)$ генерируется конечномерной автономной непрерывной системой.

Применительно к первой ситуации справедливы положения следующего утверждения.

Утверждение 3. Из оценочных неравенств

$$\alpha^2_{\tilde{x}xm}(t) \leq (\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\sigma(t)\|^2)/\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \alpha^2_{\tilde{x}xM}(t),\ \forall t,$$

где $\alpha_{\tilde{x}xm}(t)$, $\alpha_{\tilde{x}xM}(t)$ — экстремальные для любых t элементы алгебраического спектра $\{\alpha_{\tilde{x}xi}(t);\ i = \overline{1, n}\}$ обобщенных сингулярных чисел пары матриц

$$\alpha_{\tilde{x}x}(t) \in \sigma_\alpha\{\exp(\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{t})[\mathbf{I} \quad \mathbf{O}]^T, \exp(\mathbf{Ft})\}, \forall t,$$

здесь $\mathbf{I}$ – $(n \times n)$-единичная матрица; $\mathbf{O}$ – $(n \times pn)$ — нуль-матрица, из которой следует, что для относительных дополнительных движений $\delta_x(t)$ (12) и $\delta_y(t)$ (13) оказываются справедливыми оценки

$$\delta_x(t) \le (\alpha^2_{\tilde{x}xM}(t) - 1)^{1/2}\|\Delta\mathbf{q}\|, \forall t;$$

$$\delta_y(t) \le \alpha_M\{\tilde{c}_\eta\}\alpha_{\tilde{x}xM}(t)\alpha_m^{-1}\{c\}\|\Delta\mathbf{q}\|, \forall t,$$

$\alpha_M\{(\circ)\}$, $\alpha_m\{(\circ)\}$ — соответственно максимальные и минимальные сингулярные числа матрицы $(\circ)$.□

Доказательство утверждения приведено в [8, 13, 14].

Применительно ко второй ситуации справедливы положения следующего утверждения.

Утверждение 4. Рассмотрим автономные многомерные системы с векторами состояния

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}^T]^T,$$

образованные агрегированием соответственно номинальной версии системы (1), а также составной системы (11) с источником внешнего воздействия

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Ez}(t);\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0;\ \mathbf{g}(t) = \mathbf{Pz}(t)\ ,$$

где $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{g}$, $\mathbf{y} \in R^m$; $\mathbf{z} \in R^l$; $\mathbf{F} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{E} \in R^{l\times l}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{C}^T \in R^{n\times m}$, $\mathbf{P} \in R^{m\times l}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{y}(t)$ — вектор ошибки, $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^m$, так, что их векторно-матричные описания

$$\dot{\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}}(t) = \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(t);\ \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(0) = [\mathbf{O}^T_{n\times l} \quad \mathbf{I}_{l\times l}]^T\mathbf{z}(0);$$

$$\dot{\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}}}(t) = \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}}(t);\ \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}}(0) = [\mathbf{O}^T_{np\times l} \quad \mathbf{O}^T_{n\times l} \quad \mathbf{I}_{l\times l}]^T\mathbf{z}(0);$$

характеризуются матрицами

$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{11} & \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{12} \\ \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{21} & \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{GP} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix};\ \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_{11} & \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_{12} \\ \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_{21} & \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Тогда для относительных дополнительных движений $\delta_x(t)$ (12) и $\delta_y(t)$ (13) оказываются справедливыми оценки

$$\delta_x(t) \le (\alpha^2_{\tilde{\tilde{\tilde{x}}}\tilde{\tilde{x}}M}(t) - 1)^{1/2}\alpha^2_{\tilde{\tilde{x}}xM}(t)\|\Delta\mathbf{q}\|, \forall t; \tag{14}$$

$$\delta_y(t) \le \alpha_M\{\tilde{c}_\eta\}(\alpha^2_{\tilde{\tilde{x}}zM}(t) - 1)^{1/2}\alpha_{z\tilde{\tilde{x}}M}(t)\alpha_{\tilde{\tilde{x}}xM}(t) \times \\ \times \alpha^{-1}{}_m\{\Delta c\}\|\Delta\mathbf{q}\|, \forall t, \tag{15}$$

где $\alpha_{\tilde{\tilde{\tilde{x}}}\tilde{\tilde{x}}M}(t)$, $\alpha_{\tilde{\tilde{x}}xM}(t)$, $\alpha_{\tilde{\tilde{x}}zM}(t)$, $\alpha_{z\tilde{\tilde{x}}M}(t)$ — максимальные для любых t элементы алгебраических спектров обобщенных сингулярных чисел соответствующих пар матриц:

$$\alpha_{\tilde{\tilde{\tilde{x}}}\tilde{\tilde{x}}}(t) \in \sigma_\alpha\left\{\exp(\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}t)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}, \exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\right\};$$

$$\alpha_{\tilde{\tilde{x}}x}(t) \in \sigma_\alpha\left\{\exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}, \exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t)_{12}\right\};$$

$$\alpha_{\tilde{\tilde{x}}z}(t) \in \sigma_\alpha\left\{\exp(\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}t)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}, \exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t)_{22}\right\};$$

$$\alpha_{z\tilde{\tilde{x}}}(t) \in \sigma_\alpha\left\{(\exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t))_{22}, \exp(\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}t)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\right\}.\square$$

Доказательство утверждения приведено в [8, 13].

Замечание 2. В связи с приведенными Утверждениями 3, 4 отметим, что мажорирующие оценки $\hat{\delta}_x(t)$ и $\hat{\delta}_y(t)$ относительных дополнительных движений $\delta_x(t)$ (12) и $\delta_y(t)$ (13), определяемые правыми частями уравнений (6), (14), (7) и (15), позволяют для всех по норме $\|\Delta\mathbf{q}\|$ вариаций $\Delta\mathbf{q}$ вектора параметров и нормам $\|\mathbf{x}(t)\|$ и $\|\mathbf{y}(t)\|$ номинальных траекторий оценить нормы $\|\Delta\mathbf{x}(t, \Delta\mathbf{q})\|$ и $\|\Delta\mathbf{y}(t, \Delta\mathbf{q})\|$ дополнительных движений. Однако в общем случае эти оценки могут обладать большей достаточностью, чем оценки, полученные на спектрах обобщенных сингулярных чисел матриц траекторной чувствительности $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$, вычисляемых с помощью GSVD-процедуры в программной среде MATLAB [16].

Пример. Рассмотрим двухканальную фотоэлектрическую следящую систему (ФЭСС), имеющую матричное описание

$$\mathbf{F}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -149{,}0(1 + q_2) & -9{,}46 & -149{,}0(1 + q_2)q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2{,}68(1 + q_2)q_1 & 0 & -2{,}68(1 + q_2) & -1{,}55 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 149 - 0(1 + q_2) & 149{,}0(1 + q_2)q_1 \\ 0 & 0 \\ -2{,}68(1 + q_2)q_1 & 2{,}68(1 + q_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(q) = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где вектор параметров $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$ имеет номинальную реализацию $\mathbf{q}_0 = [0 \quad 0]^T$ и характеризуется вариациями $\Delta\mathbf{q}_i$, принимающими значения $|\Delta\mathbf{q}_i| \le 0{,}3$ $(i = \overline{1, 2})$. При условии, что параметр q_1 характеризует прямые перекрестные антисимметричные связи между каналами ФЭСС, а q_2 — крутизну пеленгационной характеристики в общем тракте системы. Сепаратные каналы номинальной реализации ФЭСС существенно неидентичны и характеризуются показателями колебательности $M_{\max1} = 1{,}4$ и $M_{\max2} = 1{,}2$, а также эффективными полосами пропускания на уровне 0,707 $\Delta\omega_1 = 16{,}84$ с$^{-1}$ и $\Delta\omega_2 = 2{,}11$ с$^{-1}$ соответственно. Построим эллипсоидные оценки траекторной чувствительности по состоянию и выходу при ненулевом начальном состоянии и ступенчатом конечномерном внешнем воздействии.

На рис. 1 приведены графики процессов по норме $\|\mathbf{x}(t)\|$, $\|\mathbf{y}(t)\|$, их минорант $\alpha_{\Sigma\min}(t)$, $\alpha_{H\Sigma\min}(t)$ и мажорант $\alpha_{\Sigma\max}(t)$, $\alpha_{H\Sigma\max}(t)$ векторных функций траекторной чувствительности по состоянию $\mathbf{x}(t)$ и по выходу $\mathbf{y}(t)$ при ненулевом начальном состоянии и ступенчатом внешнем воздействия $g(t) = \mathrm{const}$.

Если оценки функций траекторной чувствительности в виде минорант и мажорант умножить на $\|\Delta\mathbf{q}\|$, тогда получим оценки дополнительных движений $\|\Delta\mathbf{x}(\boldsymbol{\kappa}, \Delta\mathbf{q})\|$ и $\|\Delta\mathbf{y}(\boldsymbol{\kappa}, \Delta\mathbf{q})\|$ в виде трубок, центрированных относительно номинальных траекторий по состоянию и выходу. Для примера на рис. 2 приведены центрированные относительно номинальных состояний

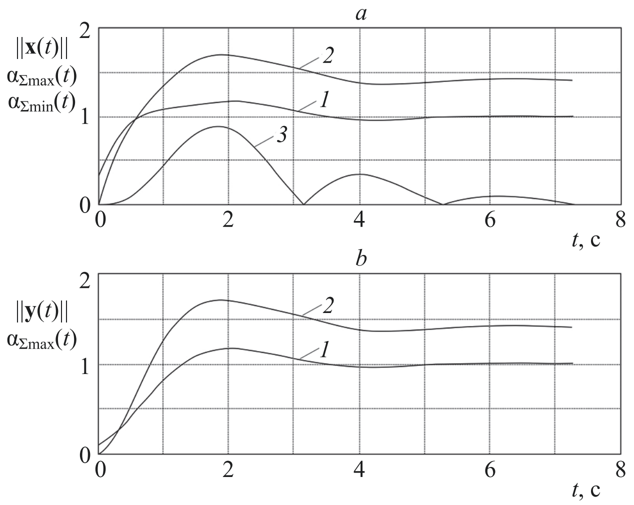

Рис. 1. Графики процессов: нормы $\|\mathbf{x}(t)\|$ (кривая *1*), мажоранты $\alpha_{\Sigma\max}(t)$ (кривая *2*) и миноранты $\alpha_{\Sigma\min}(t)$ (кривая *3*) векторных функций траекторной чувствительности по состоянию $\mathbf{x}(t)$ (*a*); нормы $\|\mathbf{y}(t)\|$ по выходу $\mathbf{y}(t)$ (кривая *1*) и мажоранте $\alpha_{H\Sigma\max}(t)$ (кривая *2*) (*b*) при ненулевом начальном состоянии и ступенчатом внешнем воздействия $g(t) = \text{const}$

Fig. 1. Graphs of processes: norm $\|\mathbf{x}(t)\|$ (curve *1*), majorants $\alpha_{\Sigma\max}(t)$ (curve *2*) and minorants $\alpha_{\Sigma\min}(t)$ (curve *3*) of vector functions of trajectory sensitivity with respect to state $\mathbf{x}(t)$ (*a*); norm of output $\mathbf{y}(t)$ (curve *1*) and majorant $\alpha_{H\Sigma\max}(t)$ (curve *2*) (*b*) for a non-zero initial state and a stepped exogenous signal $g(t) = \text{const}$

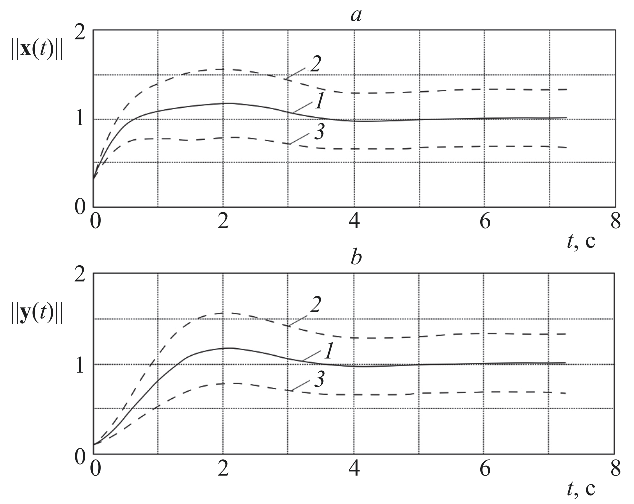

Рис. 2. Графики центрированных относительно номинальных состояний: $\mathbf{x}(t)$ (кривая *1*) (*a*) и выходов $\mathbf{y}(t)$ (кривая *1*) (*b*) трубок, ограниченных кривыми *2* и *3*, содержащие все дополнительные движения, порожденные вариациями вектора $\Delta\mathbf{q}$ параметров, характеризующимися нормой $\|\Delta\mathbf{q}\| \leq 0{,}3$

Fig. 2. Graphs of tubes centered relative to the nominal states $\mathbf{x}(t)$ (curve *1* (*a*)) and outputs $\mathbf{y}(t)$ (curve *1* (*b*)) bounded by curves *2* and *3*, containing all additional movements generated by variations of the parameter vector $\Delta\mathbf{q}$ characterized by the norm $\|\Delta\mathbf{q}\| \leq 0{,}3$

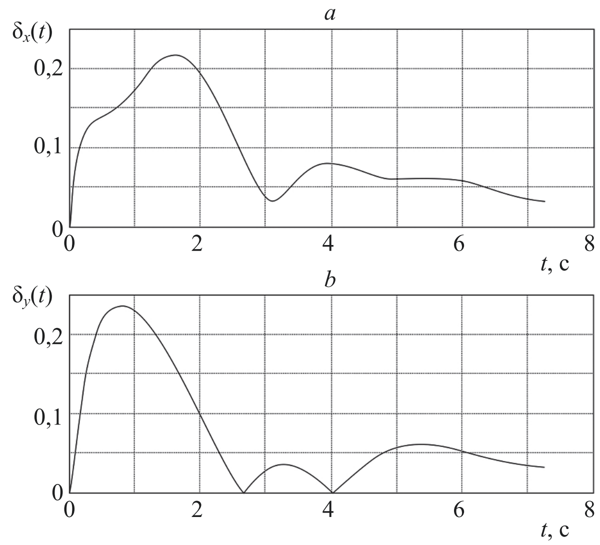

Рис. 3. Кривые относительных дополнительных движений $\delta_x(t)$ по состоянию $\mathbf{x}(t)$ (*a*) и $\delta_y(t)$ по выходу $\mathbf{y}(t)$ (*b*)

Fig. 3. Curves of relative additional motions $\delta_x(t)$ by state $\mathbf{x}(t)$ (*a*) and $\delta_y(t)$ by output $\mathbf{y}(t)$ (*b*)

и выходов трубки, содержащие все дополнительные движения, порожденные вариациями вектора $\Delta\mathbf{q}$ параметров, характеризующимися нормой $\|\Delta\mathbf{q}\| \leq 0{,}3$. На рис. 3 показаны кривые относительных дополнительных движений $\delta_x(t)$ и $\delta_y(t)$ по состоянию $\mathbf{x}(t)$ и выходу $\mathbf{y}(t)$, порожденные вариациями параметров.

Заключение

Решена задача исследования чувствительности процессов управления к вариации параметров с помощью построения эллипсоидных оценок функций траекторной чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем. При расчете использовано обобщенное сингулярное разложение матриц, составленных из функций траекторной параметрической чувствительности. В зависимости от постановки задачи исследования все множество изучаемых траекторий исследуемого процесса генерируется с помощью задания вектора начальных состояний $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(0)$ с нулевой составляющей $\sigma(0)$ последнего.

Литература

1. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
2. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности: пер. с англ. М.: Советское радио, 1972. 240 с.
3. Оморов Р.О. Модальная чувствительность, робастность и грубость динамических систем (обзорная статья) // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21. № 2. С. 179–190. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-2-179-190
4. Perkins W.R., Cruz I.B., Gonsales R.L. Design of minimum sensitivity systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. V. AC-13. N 6. P. 159–167. https://doi.org/10.1109/TAC.1968.1098853
5. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Оценки функций траекторной параметрической чувствительности систем управления // Известия вузов. Электромеханика. 1992. № 1. С. 87–92.
6. Акунов Т.А. Анализ и синтез многомерных систем управления с использованием аппарата эллипсоидных оценок качества процессов: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики. СПб., 1993. 185 с.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
9. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 160 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
12. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
13. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
14. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Анализ алгоритмических проблем при исследовании чувствительности дискретных систем // Известия вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51. № 7. С. 17–21.
15. Оморов Р.О., Акунов Т.А. Робастность интервальных динамических систем: устойчивость и эллипсоидные оценки качества // Проблемы автоматики и управления. 2021. № 3(42). С. 47–57.
16. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001. 286 с.

References

1. Rozenvasser E.N., Iusupov R.M. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. Moscow, Jenergija Publ., 1981, 464 p. (in Russian)
2. Tomovic R., Vucobratovic M. *General Sensitivity Theory*. North-Holland, 1972, 258 p.
3. Omorov R.O. The modal sensitivity, robustness and roughness of dynamic systems (review article). *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 179–190. (in Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-2-179-190
4. Perkins W.R., Cruz I.B., Gonsales R.L. Design of minimum sensitivity systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. AC-13, no. 6, pp. 159–167. https://doi.org/10.1109/TAC.1968.1098853
5. Akunov T.A., Ushakov A.V. Estimates of the trajectory parametric sensitivity functions for control systems. *Russian Electromechanics*, 1992, no. 1, pp. 87–92. (in Russian)
6. Akunov T.A. *Analisys and Synthesis of Multidimensional Systems Using the Tools of Ellipsoidal Assessments of the Processes Quality*. Dissertation for the degree of candidate of technical sciences. St. Petersburg, Saint Petersburg Institute of Fine Mechanics and Optics, 1993, 185 c. (in Russian)
7. Horn R.A., Johnson Ch.R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985, 561 p.
8. Akunov T.A., Alisherov S., Omorov R.O., Ushakov A.V. *Modal Estimations of Quality of Processes in Linear Multivarible Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 1991, 59 p. (in Russian)
9. Voevodin V.V., Kuznetcov Iu.A. *Matrices and Calculations*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 160 p. (in Russian)
10. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 660 p.
11. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice-Hall, 1977, 259 p.
12. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix Computations*. JHU Press, 1996, 756 p.
13. Grigorev V.V., Drozdov V.N., Lavrentev V.V., Ushakov A.V. *Synthesis of Discrete Controllers Using Computers*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1983, 245 p. (in Russian)
14. Akunov T.A., Sudarchikov S.A., Ushakov A.V. Analysis of algorithmic problems at research of sensitivity of lumped parameter systems. *Journal of Instrument Engineering*, 2008, vol. 51, no. 7, pp. 17–21. (in Russian)
15. Omorov R.O., Akunov T.A. Robustness of interval dynamic systems: stability and ellipsoid quality estimates. *Automation and Control Problems*, 2021, no. 3(42), pp. 47–57. (in Russian)
16. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. *Elements of Mathematical Modeling in MATLAB 5 and Scilab Computing Environments*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001, 286 p. (in Russian)

Авторы

Оморов Роман Оморович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, заведующий лабораторией «Синергетики и хаоса динамических систем», Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, sc 6602708366, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Акунов Таалайбек Абакирович — кандидат технических наук, главный научный сотрудник, Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, sc 6508211498, https://orcid.org/0000-0002-0923-9777, takunov@mail.ru

Айдралиев Акылбек Орузбаевич — инженер, Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, https://orcid.org/0000-0003-2889-3202, aidraliev@outlook.com

Authors

Roman O. Omorov — D. Sc. (Engineering), Professor, Associate Member of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Head of Laboratory of Synergetics and Chaos of Dynamic Systems, Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, sc 6602708366, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Taalaibek A. Akunov — PhD, Chief Researcher, Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, sc 6508211498, https://orcid.org/0000-0002-0923-9777, takunov@mail.ru

Akylbek O. Aidraliev — Engineer, Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, https://orcid.org/0000-0003-2889-3202, aidraliev@outlook.com

Статья поступила в редакцию 25.01.2022
Одобрена после рецензирования 03.02.2022
Принята к печати 30.03.2022

Received 25.01.2022
Approved after reviewing 03.02.2022
Accepted 30.03.2022