

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1056-1064

УДК 621.837.5

Аналитическое и имитационное моделирование гибких сочленений для мехатронных и робототехнических систем

Егор Александрович Ракшин¹✉, Иван Игоревич Борисов²

^{1,2} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ earakshin@itmo.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1983-6142>

² borisovii@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0168-6609>

Аннотация

Введение. Для работы в условиях неструктурированного окружения роботы должны обладать свойством пассивности, которое может быть реализовано с помощью алгоритмов управления и физических эластичных элементов. Гибкие элементы могут быть использованы для рекуперации энергии, абсорбировании пиковых ударных нагрузок и для упрощения системы управления в целом, снижая требования к точности информации об окружении робота. Моделирование гибких тел, например с помощью метода конечных элементов, вычислительно требовательно, что ограничивает возможности имитационного моделирования динамического поведения роботов с гибкими элементами. В работе предложен подход аналитического и имитационного моделирования гибких сочленений с помощью плоского случая модели пространственной пружины, который обеспечивает высокую скорость моделирования без потери точности. Синтез модели гибкого сочленения заключается в численной оптимизации нелинейных диаграмм жесткости вращательной и поступательных степеней свободы для плоского случая модели пространственной пружины. Синтезированная модель гибкого сочленения позволяет описать относительное движение двух звеньев. **Метод.** На первом этапе синтеза гибкое сочленение оптимизировано методом конечных элементов для поиска опорных данных о приложенной нагрузке и соответствующих деформациях. На втором этапе решена оптимизационная задача поиска нелинейных диаграмм жесткости для плоского случая модели пространственной пружины, при этом в качестве критерия выступает минимизация ошибки между опорными данными и оптимизируемой моделью пружины. На третьем этапе полученные результаты верифицированы посредством имитационного моделирования и/или натурального эксперимента. **Основные результаты.** Предложен метод аналитического и имитационного моделирования гибких сочленений с помощью модели пространственной пружины. Разработана процедура оптимизации жесткости модели пружины. Проведена верификация в среде имитационного моделирования и натуральный эксперимент. Выполнено сравнение моделирования методом конечных элементов, моделирования с помощью модели пружины и результатов натурального эксперимента. Данные эксперимента подтвердили применимость модели пространственной пружины для имитационного моделирования гибких сочленений различных топологий. Представленный метод позволяет проводить расчет имитационной модели гибкого сочленения примерно вдвое быстрее по сравнению с методом конечных элементов. **Обсуждение.** Предложенная модель гибкого сочленения применима для повышения скорости имитационного моделирования мехатронных и робототехнических систем с гибкими сочленениями без потери точности. Апробация метода планируется при проектировании локомотивных, манипуляционных, носимых роботов и захватных устройств.

Ключевые слова

имитационное моделирование, гибкие сочленения, теория упругости, модель псевдожесткого тела, оптимизация, механизм замещения

Благодарности

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации (№ МК-2081.2022.4).

Ссылка для цитирования: Ракшин Е.А., Борисов И.И. Аналитическое и имитационное моделирование гибких сочленений для мехатронных и робототехнических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 5. С. 1056–1064. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1056-1064

Analytical and simulation modeling of flexible joints for mechatronic and robotic systems

Egor A. Rakshin¹, Ivan I. Borisov²

^{1,2} ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ earakshin@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1983-6142>

² borisovii@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0168-6609>

Abstract

To operate in unstructured environments, robots must have the property of passivity which can be realized either through control algorithms or physical elastic elements. Flexible elements can be used to recover energy, absorb peak shock loads, and simplify the control system, generally reducing the requirements for accurate information about the robot's environment. The modeling of flexible bodies, for example using the finite element method, is computationally demanding, which limits the simulation of the dynamic behavior of robots with flexible elements. In this paper, we propose an approach for analytical and simulation modeling of flexible joints using the planar case of a spatial spring model, which provides high speed simulation without loss of accuracy. The synthesis of the flexible joint model consists of numerical optimization of the nonlinear stiffness diagrams of the rotational and translational degrees of freedom for the planar case of the spatial spring model. The synthesized flexible joint model allows describing the relative motion of two links. In the first step of the synthesis, the flexible joint is optimized by finite element method to find the reference data of applied load and corresponding deformations. In the second stage, an optimization problem is solved to find nonlinear stiffness diagrams for the planar case of the spatial spring model; the criterion is to minimize the error between the reference data and the optimized spring model. In the third stage, the obtained results are verified by simulation and/or physical experiment. The method of analytical and simulation modeling of flexible joints with the help of spatial spring model is proposed, the procedure of optimization of stiffness of spring model is proposed, verification in simulation environment is carried out, full-scale experiment is carried out, comparison of simulations by finite element method, simulation with the help of spring model and results of full-scale experiment is provided. The proposed method allows the calculation of a simulation model of a flexible joint approximately twice as fast as the finite element method. The proposed model of flexible joint is necessary to increase the speed of simulation modeling of mechatronic and robotic systems with compliant hinges without loss of accuracy. Approbation of the method is planned for the design of locomotion, manipulation, wearable robots, and gripper devices.

Keywords

simulation modeling, flexible joints, elasticity theory, pseudo-rigid body model, optimization, surrogate model

Acknowledgements

This work is supported by the grant of the President of the Russian Federation (project No. МК-2081.2022.4).

For citation: Rakshin E.A., Borisov I.I. Analytical and simulation modeling of flexible joints for mechatronic and robotic systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 5, pp. 1056–1064 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1056-1064

Введение

Офисные и жилые помещения, городская среда, пересеченная местность относятся к неструктурированному окружению, для работы в котором робототехнической системе необходимо строить карту местности, классифицировать окружающие объекты, планировать движение, интерпретировать собственную динамику, прикладывать усилия к подстилающей поверхности и к объектам взаимодействия, а также правильно интерпретировать собственное положение в пространстве. Производительность и безопасность робота при манипуляциях с объектами окружения, при перемещении по локации, при взаимодействии с человеком зависит от полноты данных об окружении и их точности, однако абсолютную точность гарантировать невозможно. Для обеспечения надежности, безопасности и высокой производительности роботов при работе в неструктурированном окружении роботы должны обладать свойством пассивности [1].

Пассивность в робототехнической системе может быть реализована как с помощью виртуальной пружины, реализованной алгоритмически в системе управления, так и посредством реальной физической пружины. Физическая пружина или иного вида эластичный

элемент может быть использован для рекуперации энергии, выступая батареей потенциальной энергии; для усиления генерируемой мощности, позволяя мало-мощным приводам запасать энергию и высвобождать ее импульсом; для абсорбирования неровностей объектов взаимодействия без лишнего участия регулятора [2]. Эластичные элементы позволяют преодолеть ограничения по пропускной способности традиционных жестких приводов [3].

Эластичные элементы могут быть интерпретированы как составные элементы звеньев механизмов робототехнических систем, а также использованы для сочленения звеньев между собой и передачи движения. В последнем случае сочленения называются эластичными или гибкими, передача движения в которых происходит благодаря упругой деформации гибких структур, а не путем трения скольжения или качения [4].

Кроме сложности топологического и параметрического синтезов, к недостаткам эластичных сочленений можно отнести ограниченный зоной упругости диапазон углов движения, вязкое трение, в случае изготовления из полимерных материалов, а также дрейф оси вращения [5]. Дрейф оси — смещение мгновенного центра вращения сочленения, происходит из-за изменения геометрии центра вращения при приложении

внешней силы. Для минимизации негативных эффектов гибких сочленений актуальны задачи моделирования и синтеза гибких сочленений.

Анализ существующих решений и постановка задачи

Под листовой пружиной понимается несущий элемент с поперечным сечением прямоугольной формы малой толщины, работающей на изгиб и кручение [6]. В случае листовой пружины напряжениями сдвига можно пренебречь в силу малых значений. Листовая пружина относится к тривиальному гибкому сочленению. Сложными называются сочленения, состоящие из нескольких листовых пружин. Для моделирования поведения тривиальных гибких сочленений малой толщины может быть использована модель Эйлера–Бернулли в форме дифференциального уравнения второго порядка [7]. Метод может быть использован при относительно небольших деформациях, иначе теряется точность результатов моделирования. Сложные гибкие сочленения также могут быть промоделированы моделью Эйлера–Бернулли, однако вычислительная сложность повышается кратно количеству листовых пружин.

Для анализа деформаций тел произвольной формы, в том числе сложных гибких сочленений, может быть использован метод конечных элементов, принцип которого заключается в разбиении сложной геометрии на сетку с узлами, деформации которых определяются из системы дифференциальных и интегральных уравнений [8]. Для повышения точности модели сетка разбиается на большее количество элементов, что приводит к увеличению времени на обработку. Для снижения времени обработки с сохранением точности применяется неравномерное разбиение на сетку, плотность узлов которой становятся больше в элементах тела с большой кривизной и, соответственно, меньше вдоль прямолинейных участков [9].

В работе [10] предложен метод редуцирования конечно-элементной сетки Крейга–Бэмптона, уменьшающий время расчета деформаций и сохраняющий при этом точность модели. Для среды MATLAB был разработан соответствующий программный продукт конечно-элементного анализа SPACAR [11], работающий по принципу редуцирования сетки до двухузловых элементов прямоугольного и круглого поперечных сечений.

В [12] представлен эвристический метод анализа топологий свободных подвижностей и голономных ограничений (Freedom and constraint topology, FACT), основанный на аксиомах проективной геометрии, индуктивной логики, теории винтового исчисления и алгебры Ли. Согласно базовому принципу метода, пересечение голономных ограничений в эластичном сочленении образует общую степень свободы, таким образом, позволяя выполнить оценочный анализ подвижности сочленения только на основании его топологии и геометрических характеристик.

В [4] предложен метод замещения гибкого сочленения на модель псевдожесткого тела (ПЖТ) с одной вращательной степенью подвижности. Модель ПЖТ

представляет собой рычажный механизм, состоящий из абсолютно твердых звеньев, соединенных между собой пружинами со сосредоточенной жесткостью. Метод позволяет значительно повысить скорость расчета без существенного понижения точности моделирования. Модели ПЖТ с двумя [13, 14] и тремя [15] степенями подвижности позволяют описать ориентацию и положение деформируемого гибкого сочленения в плоскости. Увеличение количества пружин в модели ПЖТ приближает его к реальной модели гибкого сочленения [16], однако вычислительная сложность растет пропорционально количеству степеней подвижности модели.

Для численной оценки поведения и производительности, верификации конструкторских решений, проектируемые робототехнические системы необходимо анализировать в средах имитационного моделирования. Для верификации динамического поведения робототехнических систем с гибкими сочленениями необходима модель, позволяющая быстро рассчитывать параметры системы без потери точности. В настоящей работе предложен подход аналитического и имитационного моделирования гибких сочленений. Подход основан на принципе замещения сочленения на плоский случай модели пространственной пружины со сосредоточенной жесткостью [4]. Синтез модели гибкого сочленения заключается в численной оптимизации нелинейных диаграмм жесткости вращательной и поступательных степеней свободы для плоского случая модели пространственной пружины.

Согласно методу замещения на модель ПЖТ, топология крестообразного гибкого сочленения (рис. 1, *a*), состоящая из четырех элементов, рассмотрена как гибридная композиция из пружин и звеньев (рис. 1, *b–d*). В работе [17] (рис. 1, *b*) описана модель ПЖТ крестообразного плоского сочленения, содержащая четыре пружины с выведенными аналитическими значениями жесткостей $k_{1,2,3,4}$. Для описания поведения модели ПЖТ требуется располагать информацией о связи степеней подвижности гибкого сочленения друг с другом. При увеличении количества пружин в модели ПЖТ время на расчет операций в алгебраических выражениях, связывающих жесткости, увеличивается. По этой причине предпочтительно упрощать топологию модели ПЖТ.

Минимальное и достаточное количество пружин в модели ПЖТ для описания ориентации и положения гибкого сочленения в плоскости равно трем — положение и ориентация конечного эффектора. Эквивалентная схема модели может быть представлена из трех последовательно соединенных пружин $k_{(x,y,z)}^{ЭКВ}$, каждая из которых соответствует степени свободы в плоскости (рис. 1, *c*) [18]. Так как степени подвижности в таком механизме влияют друг на друга, описание динамики системы требует решения совместной системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{W}, \quad (1)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ — матрицы инерции, демпфирования и жесткости; $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ — вектор обобщенных координат; $\mathbf{W} = [f_x^{ee} \ f_y^{ee} \ \tau_z^{ee}]^T$ — вектор внешних сил,

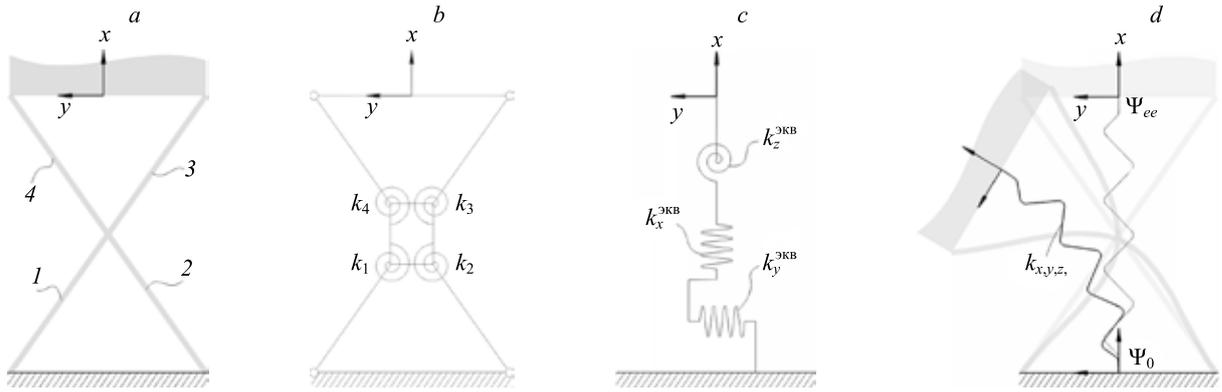


Рис. 1. Метод замещения крестообразного гибкого сочленения на модель псевдожесткого тела: гибкое сочленение (a); модель с вращательными (b) и эквивалентными (c) пружинами; модель с плоским случаем пространственной пружины (d)
 Fig. 1. Pseudo-rigid body models of cartwheel hinge: flexible joint (a), pseudo-rigid model with rotational springs (b), pseudo-rigid model with equivalent springs (c), and planar spring pseudo-rigid model (d)

приложенный к координатной оси Ψ_{ee} . При $\mathbf{W} = 0$ система находится в покое.

Модель ПЖТ может быть редуцирована до одной плоской пружины, замещающей гибкое сочленение (рис. 1, d). Эквивалентные жесткости $k_{x,y,z}(x, y, \theta)$ для каждой степени свободы связаны друг с другом. При отсутствии связи жесткостей приложение силы приведет к деформации только тех пружин, которые сонаправлены с вектором силы. Поведение гибкого сочленения предполагает одновременное движение по нескольким осям относительно инерциальной системы координат Ψ_0 , что выполнимо при наличии связности жесткостей друг с другом.

Модель плоской пружины

Модель пространственной пружины с шестью степенями подвижности представлена в работе [19], а плоский случай модели пространственной пружины рассмотрен в [20].

Плоская пружина состоит из двух продольных жесткостей и одной вращательной (рис. 2, a). Силы и моменты, генерируемые в плоской пружине при ее деформации, определены из геометрического центра податливости, относительно которого она может быть декомпозирована на эквивалентные жесткости для каждой координатной оси [20]. Смещение системы ко-

ординат Ψ_j относительно Ψ_i характеризует дрейф оси вращения (рис. 2, b).

Для двумерного случая вектор эластичных сил плоской пружины $\mathbf{W}^{elast} = [f_x^i, f_y^i, \tau_z^i]^T$ определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_z^i = -2as(\mathbf{G}_0 \mathbf{R}_j^i) - as(\mathbf{G}_t \mathbf{w} \mathbf{w}^T) \\ f_{x,y}^i = -\frac{1}{2} \mathbf{R}_j^i \mathbf{K}_t \mathbf{p}_i^j - \frac{1}{2} \mathbf{K}_t \mathbf{R}_j^i \mathbf{p}_i^j \end{cases}$$

где $f_{x,y}^i$ — продольные силы растяжения; $\tilde{\tau}_z^i$ — крутящий момент вокруг оси Oz в кососимметричной форме; as — оператор, возвращающий антисимметричную часть матрицы; $\mathbf{R}_j^i = \mathbf{R}_j^{iT}$ — матрица поворота, \mathbf{p}_i^j — положение Ψ_j относительно Ψ_i , $\mathbf{w} = \mathbf{R}_j^i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_i^j$.

Рассчитаем матрицы жесткости ориентации и линейного перемещения:

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2} k_z(x, y, \theta) \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{G}_t = \frac{1}{2} tr(\mathbf{K}_t) \mathbf{I}_2 - \mathbf{K}_t,$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{pmatrix} k_x(x, y, \theta) & 0 \\ 0 & k_y(x, y, \theta) \end{pmatrix}$$

где $tr(\mathbf{K}_t)$ — сумма элементов матрицы \mathbf{K}_t по главной диагонали; \mathbf{I} — единичная матрица.

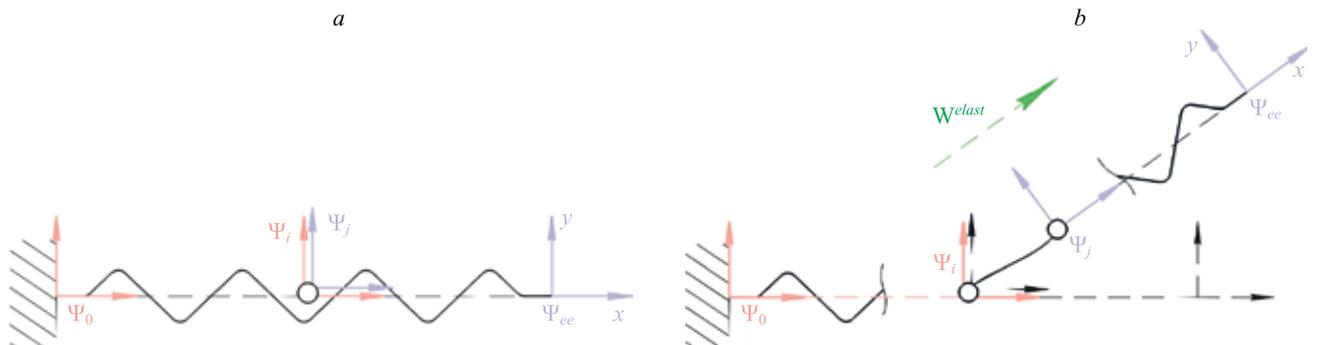


Рис. 2. Модель плоской пружины: в состоянии покоя (a); дрейф оси вращения при деформации (b)
 Fig. 2. Planar spring model: planar spring at rest (a); drift of the rotation axis during deformation (b)

В результате вектор эластичных сил примет вид:

$$\mathbf{W}_{elast} = \begin{bmatrix} k_x x \cos \theta + \frac{1}{2} k_x y \sin \theta + \frac{1}{2} k_y y \sin \theta \\ k_y y \cos \theta - \frac{1}{2} k_x x \sin \theta - \frac{1}{2} k_y x \sin \theta \\ (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta)(k_y - k_x) + k_z \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

Отметим, что крутильная жесткость k_z зависит от продольных жесткостей k_x, k_y .

Из системы уравнений (1) выведем диаграмму жесткости плоской пружины. Согласно закону Гука, $\mathbf{W}_{elast} = \mathbf{K}\mathbf{U}$, где \mathbf{K} — диагональная матрица жесткости; $\mathbf{U} = [u \ v \ \theta]^T$ — вектор деформаций. Для определения параметров плоской пружины рассчитаем $\mathbf{K}(\mathbf{U})$.

Перепишем уравнение (1) в виде векторов сил:

$$\mathbf{W}_{inert} + \mathbf{W}_{damp} + \mathbf{W}_{elast} = \mathbf{W},$$

где $\mathbf{W}_{inert} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ — инерциальные силы; $\mathbf{W}_{damp} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ — силы сопротивления при демпфировании. Оставим \mathbf{W}_{elast} , которое может быть рассчитано уравнением (2), в левой части уравнения, остальные перенесем в правую

$$\mathbf{W}_{elast} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{inert} - \mathbf{W}_{damp}, \quad (3)$$

где всю правую часть уравнения перепишем через $\mathbf{Q} = [Q_x \ Q_y \ Q_z]^T$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{inert} - \mathbf{W}_{damp}.$$

Подставив значения вектора эластичных сил (2) в уравнение (3), получим систему уравнений в компактном виде:

$$\begin{cases} k_x A_1 + k_y A_2 = Q_x \\ k_x A_3 + k_y A_4 = Q_y \\ k_x A_5 + k_y A_6 + k_z A_7 = Q_z \end{cases},$$

где $A_1 = x \cos \theta + \frac{1}{2} y \sin \theta$; $A_2 = \frac{1}{2} y \sin \theta$; $A_3 = -\frac{1}{2} x \sin \theta$; $A_4 = y \cos \theta - \frac{1}{2} x \sin \theta$; $A_5 = -\frac{1}{2} (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta)$; $A_6 = -A_5$; $A_7 = \sin \theta$.

В результате определим жесткости плоской пружины по следующим соотношениям:

$$k_x(x, y, \theta) = \frac{Q_y A_2 - Q_x A_4}{A_2 A_3 - A_1 A_4},$$

$$k_y(x, y, \theta) = \frac{Q_x A_3 - Q_y A_1}{A_2 A_3 - A_1 A_4},$$

$$k_z(x, y, \theta) = \frac{Q_z - k_x A_5 - k_y A_6}{A_7}.$$

При учете дрейфа оси вращения результирующая диагональная матрица жесткости имеет вид:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} k_x(u, v, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & k_y(u, v, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & k_z(u, v, \theta) \end{pmatrix}.$$

Для сравнения рассмотрим две оптимизируемые модели: вращательная пружина с одной степенью подвижности и плоский случай пространственной пружины. Задача оптимизации модели с одной степенью подвижности заключается в минимизации целевой функции F_1 , равной квадрату ошибки между желаемой и реальной траекториями (рис. 3, a):

$$F_1(\lambda) = \min_{i \in [1, N]} \sum_i [\sqrt{y_{ee}^2 + (L - \lambda_i L - x_{ee})^2} - \lambda_i L]^2,$$

где $\lambda > 0$ — свободный параметр; L — длина сочленения; λL — характеристический радиус [4]; $[x_{ee} \ y_{ee}]^T$ — положение системы координат выходного звена Ψ_{ee} относительно Ψ_0 .

Для имитационного моделирования гибких сочленений с большим дрейфом оси вращения разработана модель с плоской пружиной (рис. 3, b). В имитаци-

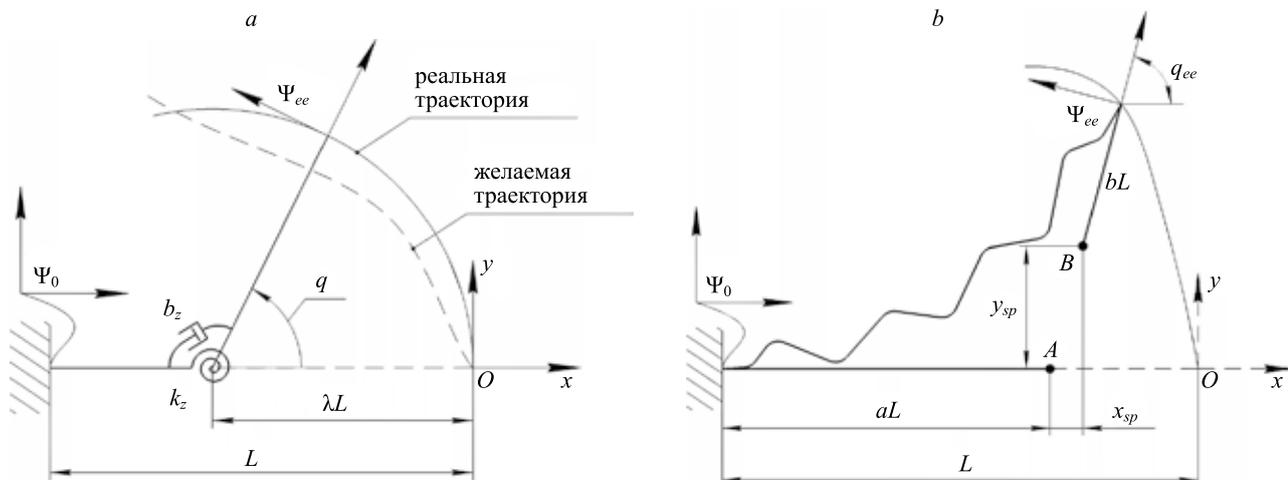


Рис. 3. Оптимизация моделей замещения. Расчетные схемы модели псевдожесткого тела с крутильной (a) и плоской (b) пружинами

Fig. 3. Pseudo-rigid body models parametric optimization. Calculation scheme of the torsion spring pseudo-rigid model (a), planar spring model (b)

онной модели определено взаимное положение двух тел длинами aL и bL , где $a, b \in [0, 1]$ свободные параметры. Для поиска начального центра податливости решим задачу минимизации расстояния между точками A и B .

В результате положение конечного звена относительно инерциальной системы координат Ψ_0 определено из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_{ee} = aL + x_{sp} + bL\cos q_{ee} \\ y_{ee} = y_{sp} + bL\sin(q_{ee}) \end{cases},$$

где $q_{ee} = q_{sp}$ и $\mathbf{P}_{sp} = [x_{sp} \ y_{sp} \ q_{sp}]^T$ — положение и ориентация центра податливости.

Целевая функция $F_2(a, b)$ в задаче поиска центра податливости плоской пружины примет вид:

$$F_2(a, b) = \Delta x_{sp}(a, b)^2 + \Delta y_{sp}(a, b)^2 \rightarrow \min,$$

$$\Delta \mathbf{P}_{sp} = \max(\mathbf{P}_{sp}) - \min(\mathbf{P}_{sp}),$$

где $\Delta \mathbf{P}_{sp}$ — результирующая деформация, равная разнице между максимальным и минимальным значениями деформации.

Экспериментальное исследование различных видов сочленений

Для апробации метода синтезируем несколько гибких сочленений: крестообразное сочленение (X-hinge [17]), листовая пружина (leaf spring, LS [21]), листовая пружина, усиленная двумя ребрами жесткости (torsionally reinforced leaf spring, TRLS(2x) [21]), перекрестное сочленение из трех листовых пружин (three-flexure cross hinge, TFCH [21]). Данные сочленения изготовлены методом аддитивных технологий из гликоль-модифицированного полиэтилентерефталата (PETG) на 3D-принтере и натурно протестированы. Выполнено сравнение результатов натурных испытаний с результатами имитационного моделирования с помощью предложенного метода. На рис. 4, *a* изображена

расчетная схема на примере крестообразного гибкого сочленения [17]. В эксперименте использованы следующие исходные данные: модуль Юнга $E = 2,95$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,38$; длина сочленения $L = 40$ мм; высота $H = 40$ мм; ширина $W = 40$ мм; толщина стенки $t = 0,8$ мм; длина плеча $l = 120$ мм.

Гибкое сочленение 1 (рис. 4, *b*) соединено с плечом 2, к которому приложена сила, измеряемая динамометром 3, перемещающемуся по направляющей 4. Камера по опорному маркеру 5 определяет положение и ориентацию плеча 2, масштабируя расстояние относительно собственной фиксированной длины. Применена обработка изображения через бинаризацию — перевод изображения в двухцветное черно-белое. Для упрощения разделения цветовых границ плечо 2 и опорный маркер 5 окрашены в черный цвет и расположены на контрастном белом фоне.

Так как в работе исследованы гибкие сочленения с вращательной степенью подвижности, главный интерес представляют данные о крутильной жесткости. Полученные данные экспериментальных замеров и компьютерных моделей приведены на рис. 5. По оси абсцисс отобразены углы деформации q , по оси ординат — прилагаемый к сочленению крутящий момент T . Маркерами обозначены результаты эксперимента; сплошные линии — моделирование модифицированным конечно-элементным методом с редукцией сетки в программной среде SPACAR; штриховые линии — имитационная модель.

В табл. 1 приведены результаты оптимизации двух моделей ПЖТ. Оптимизация выполнена в среде MATLAB с помощью программного пакета Optimization Toolbox. Для оптимизации расчетной модели с одной степенью подвижности использован одномерный метод золотого сечения *fminbdn*, для модели плоской пружины — градиентный метод *fmincon*.

В табл. 2 приведены данные о времени обработки гибкого сочленения в среде SPACAR и разработанной модели ПЖТ в среде MATLAB Simscape. Время на обработку новой модели оказалось приблизительно в

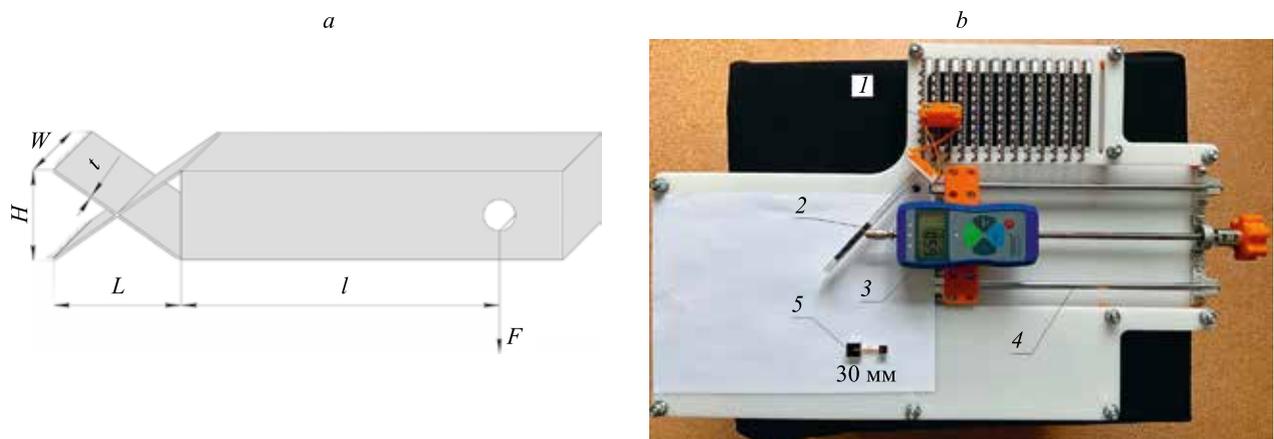


Рис. 4. Стенд для натурных испытаний гибких сочленений: габариты экспериментальной модели [17] (*a*); экспериментальный стенд: 1 — гибкое сочленение; 2 — рычаг; 3 — динамометр; 4 — направляющая; 5 — опорный маркер (*b*)

Fig. 4. Force-displacement stand: dimensions of the experimental model (*a*), experimental stand: 1 — flexible joint, 2 — lever, 3 — dynamometer, 4 — guide, 5 — fiducial marker (*b*)

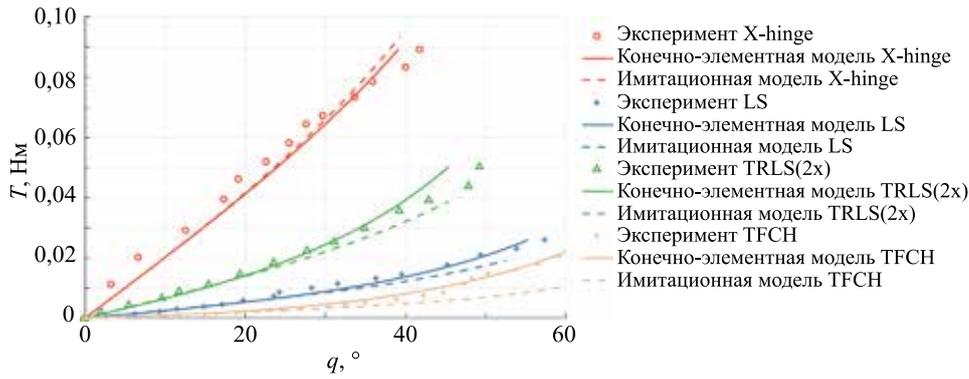


Рис. 5. Диаграммы момент-угол упругого сопротивления гибких сочленений

Fig. 5. Torque-angle diagram

Таблица 1. Результаты оптимизации моделей ПЖТ

Table 1. Results of pseudo-rigid body models parametric optimization

Наименование сочленения	Параметр крутильной пружины λ	Параметры плоской пружины		Максимальное удлинение по оси Ox Δx , мм	Максимальное удлинение по оси Oy Δy , мм
		a	b		
X-hinge	0,44	0,44	0,56	0,09	2,08
LS	0,78	0,64	0,36	0,14	5,68
TRLS(2x)	0,77	0,64	0,36	0,15	5,65
TFCH	1,47	0,82	0,18	0,04	10,61

Таблица 2. Среднее время моделирования, с

Table 2. Processing time comparison, s

Наименование сочленения	Среда моделирования	
	SPACAR	Модель ПЖТ с плоской пружиной
X-hinge	0,96	0,49
LS	1,25	0,85
TRLS(2x)	1,59	0,75
TFCH	1,23	0,78

два раза меньше. Моделирование произведено на персональном ноутбуке средней комплектации.

Обсуждение

Приведенное в табл. 1 сравнение параметров оптимизации моделей ПЖТ с одной и тремя степенями свободы показало наибольшее расхождение у гибкого сочленения с наименьшей жесткостью (TFCH). Это вызвано низкой точностью модели с крутильной пружиной, игнорирующей фактор дрейфа оси вращения.

Отметим, что при оптимизации модели плоской пружины параметры a и b не были взаимно ограничены, однако во всех случаях оптимизации их сумма составляет 1. Это обусловлено найденным оптимальным положением центра податливости, относительно которого плоская пружина декомпозируется на три составляющих жесткости. При сравнении точности воспроизведения траектории гибкого сочленения в имитационной модели модель с одной степенью под-

вижности имеет более низкую точность, чем модель плоской пружины.

Несмотря на применимость модели плоской пружины в данной задаче, скорость обработки имитационной модели ПЖТ с одной степенью подвижности ниже, что может быть критичным при многократном воспроизведении модели, например, при структурно-параметрическом синтезе гибкого сочленения. В таком случае требуется введение критерия применимости модели плоской пружины. Этот критерий заключается в анализе траектории движения конечного эффектора гибкого сочленения, выведенный из результатов обработки конечно-элементной модели.

Заключение

В работе предложен метод синтеза гибкого сочленения с помощью плоского случая пространственной пружины. По сравнению с модифицированным конечно-элементным методом в среде SPACAR, разрабо-

танная для синтеза модель может быть интегрирована в имитационные модели робототехнических систем, снабженных жесткими звеньями, приводами и системой управления.

В аналитической модели плоской пружины описана процедура параметрической оптимизации, целью которого является поиск центра податливости и последующий в процессе деформации дрейф оси вращения. Полученная оптимизационная модель может быть использована для анализа подвижности модели псевдожесткого тела — при малом дрейфе по осям Ox , Oy с использованием вращательной пружины, а по одной из осей — пружины растяжения-сжатия. Такая

оптимизация выбора топологии модели псевдожесткого тела может сократить время на расчет имитационной модели.

Синтезированная модель апробирована в имитационной среде MATLAB Simscape, сравнена с данными натурального эксперимента и конечно-элементном анализе с помощью программного продукта SPACAR. Результаты исследования показали, что разработанный метод может быть использован для моделирования гибких сочленений в имитационных средах без проведения вычислительно затратных операций со скоростью обхода приблизительно в два раза быстрее, чем конечно-элементная модель.

Литература

1. Peshkin M.A., Colgate J.E., Wannasuphprasit W., Moore C.A., Gillespie R.B., Akella P. Cobot architecture // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2001. V. 17. N 4. P. 377–390. <https://doi.org/10.1109/70.954751>
2. Rezazadeh S., Abate A., Hatton R.L., Hurst J.W. Robot leg design: A constructive framework // *IEEE Access*. 2018. V. 6. P. 54369–54387. <https://doi.org/10.1109/access.2018.2870291>
3. Hurst J.W., Rizzi A.A. Series compliance for an efficient running gait // *IEEE Robotics & Automation Magazine*. 2008. V. 15. N 3. P. 42–51. <https://doi.org/10.1109/mra.2008.927693>
4. Howell L.L. *Compliant Mechanisms*. New York, USA: Wiley, 2001. 459 p.
5. Naves M. Design and optimization of large stroke flexure mechanisms: PhD Thesis. 2021. <https://doi.org/10.3990/1.9789036549943>
6. Bescoter S.U. A theory of torsion bending for multi-cell beams // *Journal of Applied Mechanics*. 1954. V. 21. N 1. P. 25–34. <https://doi.org/10.1115/1.4010814>
7. Eltaher M.A., Alshorbagy A.E., Mahmoud F.F. Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. V. 37. N 7. P. 4787–4797. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.016>
8. Ellenbroek M., Schilder J. On the use of absolute interface coordinates in the floating frame of reference formulation for flexible multibody dynamics // *Multibody System Dynamics*. 2018. V. 43. N 3. P. 193–208. <https://doi.org/10.1007/s11044-017-9606-3>
9. White D.R., Saigal S., Owen S.J. Meshing complexity: Predicting meshing difficulty for single part CAD models // *Engineering with Computers*. 2005. V. 21. N 1. P. 76–90. <https://doi.org/10.1007/s00366-005-0002-x>
10. Craig R.R., Jr. Coupling of substructures for dynamic analyses: An overview // *Proc. of the 41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. 2000. P. 1573. <https://doi.org/10.2514/6.2000-1573>
11. Wiersma D.H., Boer S.E., Aarts R.G.K.M., Brouwer D.M. Design and performance optimization of large stroke spatial flexures // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2014. V. 9. N 1. P. 011016. <https://doi.org/10.1115/1.4025669>
12. Hopkins J.B., Culpepper M.L. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) — Part I Principles // *Precision Engineering*. 2010. V. 34. N 2. P. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2009.06.008>
13. Yu Y-Q., Zhou P., Xu Q-P. Kinematic and dynamic analysis of compliant mechanisms considering both lateral and axial deformations of flexural beams // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2019. V. 233. N 3. P. 1007–1020. <https://doi.org/10.1177/0954406218760956>
14. Yu Y-Q., Li Q., Xu Q-P. Pseudo-rigid-body dynamic modeling and analysis of compliant mechanisms // *Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2018. V. 232. N 9. P. 1665–1678. <https://doi.org/10.1177/0954406217707547>
15. Venkiteswaran V.K., Su H.J. A three-spring pseudorigid-body model for soft joints with significant elongation effects // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2016. V. 8. N 6. P. 061001. <https://doi.org/10.1115/1.4032862>

References

1. Peshkin M.A., Colgate J.E., Wannasuphprasit W., Moore C.A., Gillespie R.B., Akella P. Cobot architecture. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, vol. 17, no. 4, pp. 377–390. <https://doi.org/10.1109/70.954751>
2. Rezazadeh S., Abate A., Hatton R.L., Hurst J.W. Robot leg design: A constructive framework. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 54369–54387. <https://doi.org/10.1109/access.2018.2870291>
3. Hurst J.W., Rizzi A.A. Series compliance for an efficient running gait. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2008, vol. 15, no. 3, pp. 42–51. <https://doi.org/10.1109/mra.2008.927693>
4. Howell L.L. *Compliant Mechanisms*. New York, USA, Wiley, 2001, 459 p.
5. Naves M. *Design and optimization of large stroke flexure mechanisms*. PhD Thesis. 2021. <https://doi.org/10.3990/1.9789036549943>
6. Bescoter S.U. A theory of torsion bending for multi-cell beams. *Journal of Applied Mechanics*, 1954, vol. 21, no. 1, pp. 25–34. <https://doi.org/10.1115/1.4010814>
7. Eltaher M.A., Alshorbagy A.E., Mahmoud F.F. Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 7, pp. 4787–4797. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.016>
8. Ellenbroek M., Schilder J. On the use of absolute interface coordinates in the floating frame of reference formulation for flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2018, vol. 43, no. 3, pp. 193–208. <https://doi.org/10.1007/s11044-017-9606-3>
9. White D.R., Saigal S., Owen S.J. Meshing complexity: Predicting meshing difficulty for single part CAD models. *Engineering with Computers*, 2005, vol. 21, no. 1, pp. 76–90. <https://doi.org/10.1007/s00366-005-0002-x>
10. Craig R.R., Jr. Coupling of substructures for dynamic analyses: An overview. *Proc. of the 41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, 2000, pp. 1573. <https://doi.org/10.2514/6.2000-1573>
11. Wiersma D.H., Boer S.E., Aarts R.G.K.M., Brouwer D.M. Design and performance optimization of large stroke spatial flexures. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 011016. <https://doi.org/10.1115/1.4025669>
12. Hopkins J.B., Culpepper M.L. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) — Part I Principles. *Precision Engineering*, 2010, vol. 34, no. 2, pp. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2009.06.008>
13. Yu Y-Q., Zhou P., Xu Q-P. Kinematic and dynamic analysis of compliant mechanisms considering both lateral and axial deformations of flexural beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2019, vol. 233, no. 3, pp. 1007–1020. <https://doi.org/10.1177/0954406218760956>
14. Yu Y-Q., Li Q., Xu Q-P. Pseudo-rigid-body dynamic modeling and analysis of compliant mechanisms. *Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018, vol. 232, no. 9, pp. 1665–1678. <https://doi.org/10.1177/0954406217707547>
15. Venkiteswaran V.K., Su H.J. A three-spring pseudorigid-body model for soft joints with significant elongation effects. *Journal of*

16. Hall A.R. The Pseudo-Rigid-Body Model for Fast, Accurate, Non-Linear Elasticity: a thesis submitted to the faculty of Brigham Young University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science. 2013.
17. Pei X., Yu J., Zong G., Bi S., Su H. The modeling of cartwheel flexural hinges // *Mechanism and Machine Theory*. 2009. N 44. N 10. P. 1900–1909. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.006>
18. Šalinić S., Nikolić A. A new pseudo-rigid-body model approach for modeling the quasi-static response of planar flexure-hinge mechanisms // *Mechanism and Machine Theory*. 2018. V. 124. P. 150–161. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.02.011>
19. Stramigioli S. *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems: A Coordinate-Free Approach*. Springer, 2001. XIII, 280 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 266). <https://doi.org/10.1007/BFb0110400>
20. Folkertsma G.A. *Energy-based and biomimetic robotics*: PhD Thesis. 2017.
21. Naves M., Brouwer D.M., Aarts R.G.K.M. Building block-based spatial topology synthesis method for large-stroke flexure hinges // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2017. V. 9. N 4. P. 041006. <https://doi.org/10.1115/1.4036223>
16. Hall A.R. *The Pseudo-Rigid-Body Model for Fast, Accurate, Non-Linear Elasticity*. A thesis submitted to the faculty of Brigham Young University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science. 2013.
17. Pei X., Yu J., Zong G., Bi S., Su H. The modeling of cartwheel flexural hinges. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, no. 44, no. 10, pp. 1900–1909. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.006>
18. Šalinić S., Nikolić A. A new pseudo-rigid-body model approach for modeling the quasi-static response of planar flexure-hinge mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, vol. 124, pp. 150–161. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.02.011>
19. Stramigioli S. *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems: A Coordinate-Free Approach*. Springer, 2001, XIII, 280 p. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 266. <https://doi.org/10.1007/BFb0110400>
20. Folkertsma G.A. *Energy-based and biomimetic robotics*. PhD Thesis. 2017.
21. Naves M., Brouwer D.M., Aarts R.G.K.M. Building block-based spatial topology synthesis method for large-stroke flexure hinges. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 041006. <https://doi.org/10.1115/1.4036223>

Авторы

Ракшин Егор Александрович — инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-1983-6142>, earakshin@itmo.ru
Борисов Иван Игоревич — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-0168-6609>, borisovii@itmo.ru

Статья поступила в редакцию 01.07.2023
 Одобрена после рецензирования 28.08.2023
 Принята к печати 25.09.2023

Authors

Egor A. Rakshin — Engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-1983-6142>, earakshin@itmo.ru
Ivan. I. Borisov — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-0168-6609>, borisovii@itmo.ru

Received 01.07.2023
 Approved after reviewing 28.08.2023
 Accepted 25.09.2023



Работа доступна по лицензии
 Creative Commons
 «Attribution-NonCommercial»