

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-785-791

УДК 532.529

Управление численной диссипацией гибридного метода крупных частиц в задачах с вихревой неустойчивостью

Дмитрий Викторович Садин✉

Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация
sadin@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>

Аннотация

Предмет исследования. Современные тенденции развития численных схем связаны с уменьшением диссипативных и дисперсионных ошибок, а также улучшением сеточной сходимости решения. Достижение этих вычислительных свойств — непростая проблема, так как уменьшение схемной вязкости часто сопряжено с возрастанием осцилляций газодинамических параметров. В работе представлено исследование вопросов управления численной диссипацией в задачах газовой динамики с целью повышения разрешающей способности при численном воспроизведении вихревой неустойчивости на контактных границах. **Метод.** Для решения поставленной задачи использован гибридный метод крупных частиц второго порядка аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Метод построен с расщеплением по физическим процессам в два этапа: градиентное ускорение и деформирование конечного объема среды; конвективный перенос среды через его грани. Повышение порядка аппроксимации по времени достигается корректирующим шагом по времени. Регуляризация численного решения задач на первом этапе метода заключается в нелинейной коррекции искусственной вязкости, которая независимо от разрешения сетки стремится к нулю в областях гладкости решения. На этапе конвективного переноса выполнена реконструкция потоков путем аддитивной комбинации центральной и противопоточной аппроксимаций. **Основные результаты.** Предложен механизм регулирования численной диссипации метода, основанный на новом параметрическом ограничителе искусственной вязкости. Оптимальная настройка метода по соотношению диссипативных и дисперсионных свойств численного решения достигнута заданием параметра ограничительной функции. Проверка эффективности метода проведена на двумерных показательных задачах. В одной из них контактные поверхности закручены в спираль, на которых возникает вихревая неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Другая задача — классический тест с двойным маховским отражением сильной ударной волны. Сравнение с современными численными методами показало, что предложенный вариант гибридного метода крупных частиц обладает высокой конкурентоспособностью. Например, в задаче с двойным маховским отражением рассматриваемый вариант метода превосходит по вихреразрешающей способности популярную схему WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) пятого порядка и сопоставим с численным решением WENO девятого порядка аппроксимации. **Практическая значимость.** Предложенный метод может быть основой конвективного блока численной схемы при построении вычислительной технологии моделирования турбулентности.

Ключевые слова

гибридный метод крупных частиц, разрешающая способность, численная диссипация, вихревая неустойчивость

Ссылка для цитирования: Садин Д.В. Управление численной диссипацией гибридного метода крупных частиц в задачах с вихревой неустойчивостью // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 4. С. 785–791. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-785-791

Numerical dissipation control of a hybrid large-particle method in vortex instability problems

Dmitry V. Sadin✉

Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

sadin@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>

Abstract

Current trends in the development of numerical schemes are associated with a decrease in dissipative and dispersion errors, as well as an improvement in the grid convergence of the solution. Achieving the computational properties is not an easy problem since a decrease in scheme viscosity is often associated with an increase in the oscillations of gas dynamic parameters. The paper presents a study of the issues of numerical dissipation control in gas dynamics problems in order to increase the resolution in numerical reproduction of vortex instability at contact boundaries. To solve this problem, a hybrid large-particle method of the second order of approximation in space and time on smooth solutions is used. The method is constructed with splitting by physical processes in two stages: gradient acceleration and deformation of the finite volume of the medium; convective transfer of the medium through its facets. An increase in the order of approximation in time is achieved by a time correction step. The regularization of the numerical solution of problems at the first stage of the method consists in the nonlinear correction of artificial viscosity which, regardless of the grid resolution, tends to zero in the areas of smoothness of the solution. At the stage of convective transport, the reconstruction of fluxes was carried out by an additive combination of central and upwind approximations. A mechanism for regulating the numerical dissipation of the method based on a new parametric limiter of artificial viscosity is proposed. The optimal adjustment of the method by the ratio of dissipative and dispersive properties of the numerical solution is achieved by setting the parameter of the limiting function. The efficiency of the method was tested on two-dimensional demonstrative problems. In one of them, the contact surfaces are twisted into a spiral on which the Kelvin-Helmholtz vortex instability develops. Another task is the classic problem with a double Mach reflection of a strong shock wave. Comparison with modern numerical schemes has shown that the proposed variant of the hybrid large-particle method has a high competitiveness. For example, in the problem with double Mach reflection, the considered version of the method surpasses in terms of vortex resolution the popular WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) scheme of the fifth order and is comparable to the numerical solution of WENO of the ninth order of approximation. The proposed method can be the basis of a convective block of a numerical scheme when constructing a computational technology for modeling turbulence.

Keywords

hybrid large-particle method, resolution, numerical dissipation, vortex instability

For citation: Sadin D.V. Numerical dissipation control of a hybrid large-particle method in vortex instability problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 785–791 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-785-791

Введение

Численное моделирование структурно сложных течений газа связано с проблемами корректного расчета ударных волн и контактных разрывов, а также различных видов неустойчивости и многомасштабного разрешения формируемых вихревых образований. Традиционные схемы первого порядка аппроксимации Годунова [1], Рое [2], Белоцерковского–Давыдова [3] позволяют численно воспроизводить монотонные, но существенно сглаженные профили разрывов в газовом потоке. В задачах моделирования вихревых структур или акустических волн применение разностных или конечно-объемных схем первого порядка оказывается практически не пригодным, так как требуется недопустимо большое число сеточных узлов (контрольных объемов).

Как известно, теорема Годунова [1] не допускает построение монотонных схем для линейного уравнения переноса выше первого порядка аппроксимации, что может приводить к появлению нефизических осцилляций в решении. Для подавления осцилляций в разностных схемах повышенного порядка аппроксимации предложены различные нелинейные алгоритмические приемы, основанные на принципах минимальных значений производных [4], невозрастания общей вариации

решения Total Variation Diminishing (TVD) [5], перебора шаблонов с учетом локальной гладкости решения Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) [6, 7] и др.

Современные тенденции развития численных схем связаны с уменьшением диссипативных и дисперсионных ошибок, а также улучшением сеточной сходимости решения [8–10]. Достижение этих вычислительных свойств является непростой проблемой, поскольку уменьшение схемной вязкости часто сопряжено с возрастанием осцилляций газодинамических параметров.

В общем случае течение газа описывается с учетом вязкости и теплопроводности. Вместе с тем численное моделирование будет корректно, если эффективная численная вязкость схемы существенно меньше физической. Как правило, сравнительный анализ эффективности алгоритмов выполняется в тестовых задачах с вихревой неустойчивостью в невязкой постановке [11, 12]. При этом предпочтительна менее диссипативная схема, обладающая лучшей вихреразрешающей способностью.

Работа посвящена совершенствованию гибридного метода крупных частиц с управляемой численной диссипацией CDP2 (Controlled Dissipative Property) [13, 14]. Регулирование диссипативных свойств метода осуществлено двумя способами. Первый заключается в нелинейной коррекции искусственной вязкости, кото-

рая независимо от разрешения сетки стремится к нулю в областях гладкости численного решения. Вторым способ — реконструкция конвективных величин путем аддитивной комбинации центральной и противопоточной аппроксимаций.

Цель работы — повышение разрешающей способности гибридного метода крупных частиц при численном воспроизведении вихревой неустойчивости на контактных границах путем управления численной диссипацией при аппроксимации законов сохранения.

Математическая модель и алгоритм расчета

Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа в форме уравнений Эйлера в безразмерном виде [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \nabla_d \mathbf{F} &= 0, \\ \mathbf{q} &= [\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E]^T, \mathbf{G} = [\rho \mathbf{v}, \rho \mathbf{v} \mathbf{v}, \rho E \mathbf{v}]^T, \\ \mathbf{F} &= [0, p, p \mathbf{v}]^T, \nabla_d = \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla, \nabla \cdot), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , $\mathbf{v}$, p , E — плотность, вектор скорости с компонентами u и v , давление, полная энергия газа единицы массы; $\mathbf{q}$, $\mathbf{G}$ — консервативные и потоковые величины; $\mathbf{F}$ — градиентные и деформационные величины; t — время; ∇_d — диагональная матрица с операторами набла на главной диагонали; точка — знак скалярного произведения.

Законы сохранения (1) дополняются уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \mathbf{v}^2/2),$$

где γ — показатель адиабаты.

Схема гибридного метода крупных частиц реализуется с расщеплением по физическим процессам на два этапа.

На первом этапе аппроксимируются градиентные и деформационные слагаемые $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{q}_n^{(0)} = \mathbf{q}_n^k - \left(\langle \mathbf{F}_{n+1/2}^k \rangle_{\psi_v} - \langle \mathbf{F}_{n-1/2}^k \rangle_{\psi_v} \right) \tau / h, \quad (2)$$

а на втором — потоковые члены законов сохранения $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - \left(\langle \mathbf{G}_{n+1/2}^{(0)} \rangle_{\psi_f} - \langle \mathbf{G}_{n-1/2}^{(0)} \rangle_{\psi_f} \right) \tau / h, \quad (3)$$

где $\tau = t^{k+1} - t^k$ — шаг по времени (t^k — временной слой); h — размер ячейки с ее центром x_n и гранями $x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2$; $\langle \cdot \rangle_{\psi_v}$ и $\langle \cdot \rangle_{\psi_f}$ — операторы нелинейной коррекции искусственной вязкости с ограничителем ψ_v и реконструкции потоков с ограничителем ψ_f (подробнее представленные в работах [13, 14]).

Повышение порядка аппроксимации до $O(h^2 + \tau^2)$ достигается с использованием корректирующего шага:

$$\mathbf{q}_n^{(2)} = 0,5(\mathbf{q}_n^k + \mathbf{q}_n^{(1)}) - 0,5 \left(\langle \mathbf{F}_{n+1/2}^{(1)} \rangle_{\psi_v} - \langle \mathbf{F}_{n-1/2}^{(1)} \rangle_{\psi_v} \right) \tau / h, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_n^{k+1} = \mathbf{q}_n^{(2)} - 0,5 \left(\langle \mathbf{G}_{n+1/2}^{(2)} \rangle_{\psi_f} - \langle \mathbf{G}_{n-1/2}^{(2)} \rangle_{\psi_f} \right) \tau / h. \quad (5)$$

К настоящему времени предложено большое количество ограничителей TVD-типа, выбор которых определяется классом решаемых задач [15]. Для более гибкого (параметрического) регулирования диссипативных свойств гибридного метода крупных частиц реализована линейная комбинация известных ограничителей [16]. Например, новый параметрический β -ограничитель:

$$\psi_{VC} = \beta \psi_{SC} + (1 - \beta) \psi_{VL}$$

позволяет управлять численной вязкостью схемы за счет комбинации ограничителей:

Van Leer

$$\psi_{VL}(r) = (r + |r|)/(1 + r)$$

и Super-C

$$\psi_{SC} = \begin{cases} \min(2r/|c|, 1), & 0 \leq r \leq 1, \\ \min(r, 2/(1 - |c|)) & r > 1, \\ 0,4 & r < 0, \end{cases}$$

где r — отношение наклонов газодинамических параметров в соседних ячейках, $c = u\tau/h$ — аналог числа Куранта.

Характерные области действия ограничителей ψ_{VL} , ψ_{SC} и их линейной комбинации ψ_{VC} в зависимости от отношения наклонов r показаны на диаграмме Sweby (рис. 1). На интервале изменения переменной $r < 0$ отношения наклонов имеют разные знаки — сеточное решение содержит экстремумы (осцилляции). При этом ограничительная функция задается $\psi = 0$, и обеспечивается повышенная численная диссипация. В области $r \geq 0$ решение обладает различной степенью гладкости, а аппроксимация потоков в алгоритме гибридного метода крупных частиц (3), (5) является бездиссипативной при $\psi = 1$.

Механическое использование известных ограничителей для искусственной вязкости в (2) и (4) возможно, но не является оптимальным. В частности, применение $\psi = 0$ в области экстремумов при $r < 0$ сглаживает сеточное решение, но вносит в схему избыточную численную вязкость. Потому рациональным способом регулирования диссипации может быть ограничитель вида $\psi_{\beta C} = \beta + (1 - \beta)\psi_{SC}$, области действия которого показаны сплошной кривой 4 на рис. 1.

Верификация алгоритма расчета

Выполним проверку работоспособности нового алгоритма нелинейной коррекции искусственной вязкости на показательных тестовых задачах с вихревой неустойчивостью, для которых (например, [10–12]) известны решения различными численными методами. Задачи решены в плоской ортогональной системе координат на равномерной сетке с числом Куранта CFL = 0,4. Для обеспечения высокой информативности результатов постобработка осуществлена в виде численных шлирен-изображений (нелинейной функции градиента плотности Quirk and Karni) [14]:

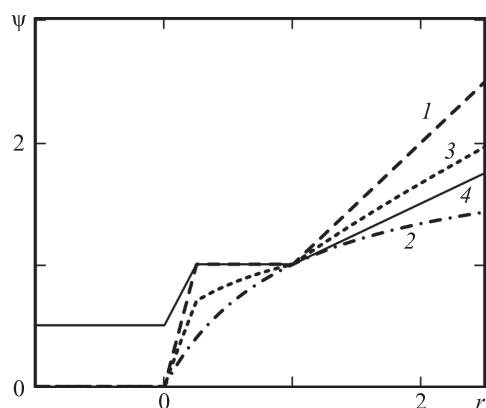


Рис. 1. Диаграмма Sweby. Ограничительные функции: ψ_{SC} (кривая 1); ψ_{VL} (кривая 2); ψ_{VC} с параметром $\beta = 0,5$ (кривая 3); ограничитель искусственной вязкости $\psi_{0,5C}$ (кривая 4) в зависимости от отношения наклонов r

Fig. 1. The Sweby diagram. Limiter functions: ψ_{SC} (curve 1), ψ_{VL} (curve 2); ψ_{VC} with the parameter $\beta = 0,5$ (curve 3), artificial viscosity limiter $\psi_{0,5C}$ (curve 4) depending on the slope ratio r

$$s_{ij} = \exp \left(-k \frac{|\nabla \rho_{ij}|}{\max_{i,j} |\nabla \rho_{i,j}|} \right),$$

где i, j — нумерация ячеек по x и y соответственно; $\nabla \rho_{ij}$ — градиент плотности; k — настроечный коэффициент для контрастного отображения деталей потока.

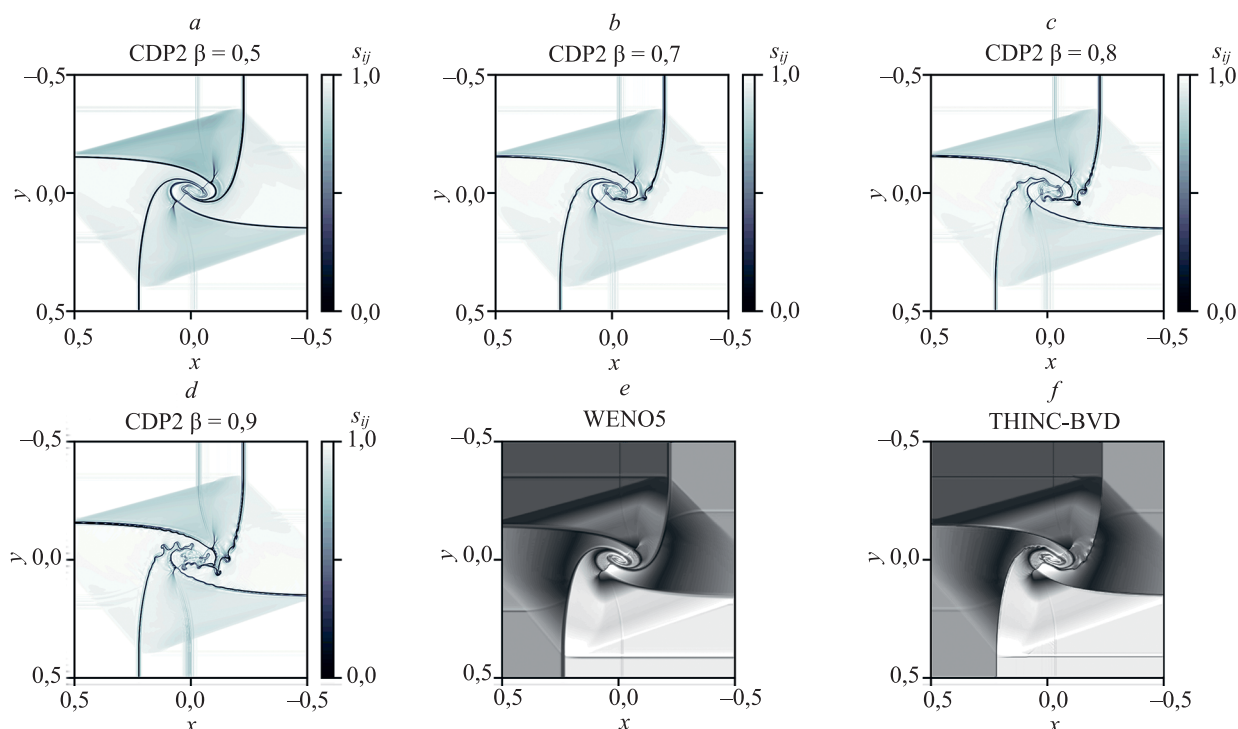


Рис. 2. Численные шlieren-изображения функции градиента плотности в задаче Римана с контактными разрывами на сетке 600×600 ячеек, полученные гибридным методом крупных частиц с комбинацией ограничителей потоков ψ_{SC} и ψ_{VL} для значений параметра β : 0,5 (a); 0,7 (b); 0,8 (c) и 0,9 (d); теневые изображения: схемы WENO5 (e) и метода THINC-BVD из [12] (f)

Fig. 2. Numerical schlieren-images of the density gradient function in the Riemann problem with contact discontinuities on a grid of 600×600 cells obtained by the hybrid large-particle method with a combination of flux limiters ψ_{SC} and ψ_{VL} for parameter values $\beta = 0,5$ (a); 0,7 (b); 0,8 (c) and 0,9 (d); shadow images: WENO5 (e), THINC-BVD from [12] (f)

Первый тест связан двумерными задачами Римана с формированием четырех контактных разрывов и их закручиванием в спираль [12]. Область определения задачи $[-0,5; 0,5] \times [-0,5; 0,5]$ разделена прямыми $x = 0$ и $y = 0$ на четыре квадранта. Постоянные начальные условия приведены в ячейках таблицы, соответствующим позициям квадрантов.

На границах расчетной области заданы «мягкие» краевые условия. Как и в работе [12], расчеты выполнены на сетке 600×600 ячеек до момента времени 0,3. Для нелинейной коррекции искусственной вязкости использован ограничитель $\psi_{\beta C}$ с параметром $\beta = 0,5$. Управление численной диссипацией потоков осуществлено с помощью комбинированной функции наклонов $\psi_{VC}(\beta)$ для различных значений параметра $\beta = 0,5; 0,7; 0,8; 0,9$.

Результаты расчетов представлены на рис. 2. Особенности данной конфигурации: непрерывность давления и нормальной составляющей скорости; плотность и касательный компонент скорости претерпевают разрыв. Контактные поверхности закручиваются в спираль, на которых развивается вихревая неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Популярная схема WENO5 [12] не выявляет отмеченный эффект на заданной детализации сетки (рис. 2, e). Гибридный метод крупных частиц с использованием ограничителя потоков $\psi_{VC}(\beta)$ при $\beta \geq 0,7$ разрешает вторичную вихревую структуру на поверхности спирали (рис. 2, b–d) и превосходит по вихреразрешающей способности метод THINC-BVD

Таблица. Начальные условия
Table. Initial conditions

Позиция в квадрантах	Параметры							
	p		r		u		v	
	слева	справа	слева	справа	слева	справа	слева	справа
Сверху	1	1	2	1	0,75	0,75	0,50	-0,50
Снизу	1	1	1	3	-0,75	-0,75	0,50	-0,50

(Tangent of Hyperbola for Interface Capturing – Boundary Variations Diminishing) из [12] (рис. 2, *f*).

В качестве второго теста выбрана классическая задача с двойным маховским отражением сильной ударной волны (Double Mach reflection of a strong shock [11]). В начальный момент времени ударная волна с числом Маха 10 образует угол $\pi/3$ с осью $0x$ и пересекает ее в точке $1/6$. Перед волной заданы параметры: плотность $\rho = 1,4$, давление $p = 1$ и скорость с компонентами $u = v = 0$. Расчетная область задачи $[0, 4] \times [0, 1]$. Граничные условия при $y = 0$ на отрезке $[0, 1/6]$ заданы в виде свободного вытекания, а в остальной части

$[1/6, 4]$ — условия отражения. Краевые условия слева и сверху за ударной волной установлены из соотношений Рэнкина–Гюгонио, а справа при $x = 4$ и сверху до скачка уплотнения градиенты газодинамических параметров заданы равными нулю. Время окончания расчета 0,2.

В результате взаимодействия косого скачка уплотнения с твердой стенкой возникает конфигурация с двумя тройными точками, двойным маховским отражением и наклонной контактной поверхностью, на которой развивается вихревая неустойчивость. Экспериментальное подтверждение и детальное обсуждение конфигураций с косыми ударными волнами приведена в работе [17].

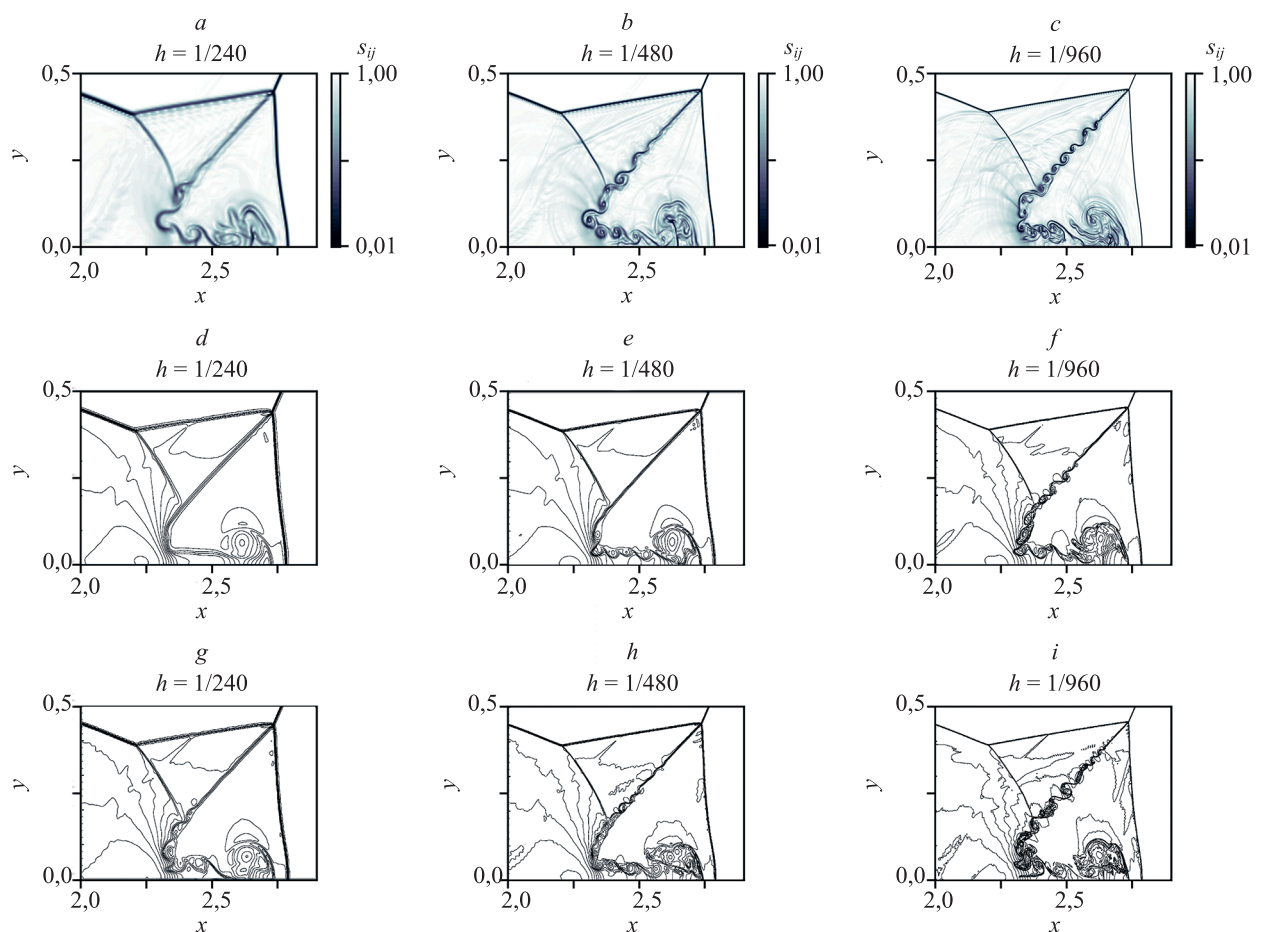


Рис. 3. Численные шлирен-изображения функции градиента плотности в задаче с двойным маховским отражением ударной волны, полученные гибридным методом крупных частиц с комбинацией ограничителей потоков: ψ_{SC} и ψ_{VL} (а) при $\beta = 0,2$; ψ_{VL} и ψ_{MM} при $\beta = 1,0$ (б) и $\beta = 0,6$ (с). Контурные линии плотности от 1,5 до 22,9705 для схемы: WENO5 (d–f) и WENO9 из [11] (g–i)

Fig. 3. Numerical schlieren-images of the density gradient function in the problem with double Mach reflection of a shock wave obtained by the hybrid large-particle method with a combination of flux limiters: ψ_{SC} and ψ_{VL} (a) for $\beta = 0.2$; ψ_{VL} and ψ_{MM} for $\beta = 1.0$ (b) and $\beta = 0.6$ (c). Contour lines of density from 1.5 to 22.9705 for scheme: WENO5 (d–f), WENO9 from [11] (g–i)

Вычислительная проблема данной задачи — разрешение вихревой структуры на наклонном контактом разрыве. Это предъявляет к численным моделям высокие конфликтующие между собой требования малой схемной диссипативности, но достаточной для подавления дисперсионных ошибок (нефизических осцилляций).

На рис. 3, *a–c* показаны результаты расчетов гибридным методом крупных частиц с предложенной нелинейной коррекцией искусственной вязкости ψ_{PC} с параметром $\beta = 0,5$ на сетках различного разрешения: 1/240, 1/480, 1/960. На грубой сетке 1/240 использован ограничитель потоков ψ_{VC} (0,2), а на подробных сетках 1/480, 1/960 — более диссипативная комбинация ограничителей MINMOD и Van Leer [18] $\psi_{\text{MV}} = \beta\psi_{\text{VL}} + (1 - \beta)\psi_{\text{MM}}$ с параметрами соответственно $\beta = 1,0$ и 0,6.

Проведено сравнение расчетов по схемам пятого и девятого порядков аппроксимации: WENO5 (рис. 3, *d–f*) и WENO9 (рис. 3, *g–i*) [11]. Сопоставление представленных результатов показало, что предложенный алгоритм гибридного метода крупных частиц на всех

детализациях сеток превосходит по вихреразрешающей способности популярную схему WENO5 и сопоставим с WENO9. Кроме того, применение предложенного алгоритма нелинейной коррекции позволило значительно улучшить вычислительные свойства метода и качество численных решений [18, 19], в особенности на грубых сетках.

Заключение

В рамках гибридного метода крупных частиц предложена новая форма нелинейной коррекции искусственной вязкости. Оптимальная настройка метода по соотношению диссипативных и дисперсионных свойств численного решения получена заданием ограничительной функции искусственной вязкости. Выполнена проверка предложенного метода на показательных тестовых задачах с развитием вихревой неустойчивости на контактной границе. Гибридный метод крупных частиц продемонстрировал высокий потенциал, превосходя по разрешающей способности популярную схему WENO5.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
2. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // Journal of Computational Physics. 1981. V. 43. N 2. P. 357–372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11. № 1. С. 182–207.
4. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. V. 49. N 3. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
6. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // Journal of Computational Physics. 1994. V. 115. N 1. P. 200–212. <https://doi.org/10.1006/JCPH.1994.1187>
7. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. V. 126. N 1. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
8. Zhang S., Zhu J., Shu C.-W. A brief review on the convergence to steady state solutions of Euler equations with high-order WENO schemes // Advances in Aerodynamics. 2019. V. 1. N 1. P. 16. <https://doi.org/10.1186/s42774-019-0019-2>
9. Minoshima T., Miyoshi T. A low-dissipation HLLD approximate Riemann solver for a very wide range of Mach numbers // Journal of Computational Physics. 2021. V. 446. P. 110639. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110639>
10. Li J., Shu C.-W., Qiu J. Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 2021. V. 446. P. 110653. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110653>
11. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // Journal of Computational Physics. 2003. V. 186. N 2. P. 690–696. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00094-9](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00094-9)
12. Deng X., Xie B., Loubère R., Shimizu Y., Xiao F. Limiter-free discontinuity-capturing scheme for compressible gas dynamics with reactive fronts // Computers & Fluids. 2018. V. 171. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.05.015>

References

1. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mathematics of the USSR – Sbornik*, 1959, vol. 47, no. 8–9, pp. 357–393.
2. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 43, no. 2, pp. 357–372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
3. Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M. A non-stationary “Coarse particle” method for gas-dynamical computations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, no. 1, pp. 241–271. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90112-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90112-1)
4. Kolgan V.P. An application of the minimal derivative values concept to construction of the finite-difference schemes for calculating the discontinuous solutions of gas dynamics. *Uchenyye Zapiski TsAGI*, 1972, vol. 3, no. 6, pp. 68–77. (in Russian)
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no. 3, pp. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
6. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 1994, vol. 115, no. 1, pp. 200–212. <https://doi.org/10.1006/JCPH.1994.1187>
7. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
8. Zhang S., Zhu J., Shu C.-W. A brief review on the convergence to steady state solutions of Euler equations with high-order WENO schemes. *Advances in Aerodynamics*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 16. <https://doi.org/10.1186/s42774-019-0019-2>
9. Minoshima T., Miyoshi T. A low-dissipation HLLD approximate Riemann solver for a very wide range of Mach numbers. *Journal of Computational Physics*, 2021, vol. 446, pp. 110639. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110639>
10. Li J., Shu C.-W., Qiu J. Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 2021, vol. 446, pp. 110653. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110653>
11. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 186, no. 2, pp. 690–696. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00094-9](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00094-9)
12. Deng X., Xie B., Loubère R., Shimizu Y., Xiao F. Limiter-free discontinuity-capturing scheme for compressible gas dynamics with

13. Садин Д.В. Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газовзвеси // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 112–122. <https://doi.org/10.14529/mmp190209>
14. Садин Д.В., Голиков И.О., Широкова Е.Н. Тестирование гибридного метода крупных частиц на двумерных задачах Римана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 1. С. 58–71. <https://doi.org/10.18721/JPM.14104>
15. Zhang D., Jiang C., Liang D., Cheng L. A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations // *Journal of Computational Physics*. 2015. V. 302. P. 114–154. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.042>
16. Садин Д.В. Моделирование физической неустойчивости на контактных границах в течениях многокомпонентных сжимаемых газов гибридным методом крупных частиц // Вычислительные методы и программирование. 2020. Т. 21. № 2. С. 129–137. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r211>
17. Семенов А.Н., Березкина М.К., Красовская И.В. Классификация разновидностей отражения ударной волны от клина. Часть 2. Экспериментальное и численное исследование разновидностей маховского отражения // Журнал технической физики. 2009. Т. 79. № 4. С. 52–58.
18. Садин Д.В. Анализ диссипативных свойств гибридного метода крупных частиц для структурно сложных течений газа // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 4. С. 757–772. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-4-757-772>
19. Садин Д.В. Эффективная реализация гибридного метода крупных частиц // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 4. С. 113–127. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-04-08>
- reactive fronts. *Computers & Fluids*, 2018, vol. 171, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.05.015>
13. Sadin D.V. A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 112–122. (in Russian). <https://doi.org/10.14529/mmp190209>
14. Sadin D.V., Golikov I.O., Shirokova E.N. Testing of the hybrid large-particle method using two-dimensional Riemann problems. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 58–71. (in Russian). <https://doi.org/10.18721/JPM.14104>
15. Zhang D., Jiang C., Liang D., Cheng L. A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations. *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 302, pp. 114–154. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.042>
16. Sadin D.V. Simulation of physical instability on contact boundaries in multicomponent compressible gas flows by a hybrid large-particle method. *Numerical Methods and Programming*, 2020, vol. 21, no. 2, pp. 129–137. (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r211>
17. Semenov A.N., Berezhkina M.K., Krasovskaya I.V. Classification of shock wave reflections from a wedge. Part 2: Experimental and numerical simulations of different types of Mach reflections. *Technical Physics*, 2009, vol. 54, no. 4, pp. 497–503. <https://doi.org/10.1134/S1063784209040094>
18. Sadin D.V. Analysis of dissipative properties of a hybrid large-particle method for structurally complicated gas flows. *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 757–772. (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-4-757-772>
19. Sadin D.V. Efficient implementation of the hybrid large-particle method. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2022, vol. 34, no. 4, pp. 113–127. (in Russian). <https://doi.org/10.20948/mm-2022-04-08>

Автор

Садин Дмитрий Викторович — доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>, sadin@yandex.ru

Author

Dmitry V. Sadin — D. Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>, sadin@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 25.05.2022
Одобрена после рецензирования 10.06.2022
Принята к печати 14.07.2022

Received 25.05.2022
Approved after reviewing 10.06.2022
Accepted 14.07.2022



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»