

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-3-472-479

УДК 681.5.013

Адаптивное управление нелинейным объектом с несогласованными параметрическими неопределенностями и ограничением на входное воздействие

Артём Витальевич Пашенко^{1✉}, Дмитрий Николаевич Герасимов²,
 Алексей Владимирович Парамонов³, Владимир Олегович Никифоров⁴

^{1,2,3,4} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ ar.v.pashenko@gmail.com[✉], <https://orcid.org/0000-0002-9461-8180>

² dngerasimov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>

³ avparamonov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6355-0670>

⁴ nikiforov_vo@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>

Аннотация

Предмет исследования. Рассмотрена задача адаптивного управления параметрически неопределенным нелинейным объектом, представленным в параметризованной форме с несогласованными неопределенностями и ограничением на величину входного воздействия. **Метод.** Решение задачи основано на использовании процедуры адаптивного бэкстеппинга, виртуальные управления в которой зависят от старших производных настраиваемых параметров, рассчитанных с помощью алгоритма адаптации с улучшенной параметрической сходимостью. Выполнен аналитический синтез управления с компенсацией влияния ограничений на управление с применением специального фильтра. **Основные результаты.** Представленный подход позволяет синтезировать адаптивный регулятор для обеспечения ограниченности всех сигналов в замкнутой системе и слежения за задающим сигналом. Приведенные результаты моделирования в среде MATLAB/Simulink продемонстрировали работу подхода и ускорение параметрической настройки при повышении коэффициента адаптации. **Практическая значимость.** Рассмотренный класс объектов описывает широкий спектр систем, таких как манипуляционные роботы, технологические процессы на производстве, электромагнитные системы с эффектом левитации, химические процессы и др. Предложенный алгоритм управления учитывает естественные в практических приложениях ограничения на входное воздействие и существенно снижает влияние скорости настройки параметров регулятора на переходные процессы системы управления.

Ключевые слова

адаптивное управление, бэкстеппинг, нелинейный объект, ограничение на управление, улучшенная параметрическая настройка

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90103.

Ссылка для цитирования: Пашенко А.В., Герасимов Д.Н., Парамонов А.В., Никифоров В.О. Адаптивное управление нелинейным объектом с несогласованными параметрическими неопределенностями и ограничением на входное воздействие // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 3. С. 472–479. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-3-472-479

Adaptive control of nonlinear plant with unmatched parametric uncertainties and input saturation

Artem V. Pashenko^{1✉}, Dmitry N. Gerasimov², Aleksei V. Paramonov³,
 Vladimir O. Nikiforov⁴

^{1,2,3,4} ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ ar.v.pashenko@gmail.com[✉], <https://orcid.org/0000-0002-9461-8180>

² dngerasimov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>

³ avparamonov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6355-0670>

⁴ nikiforov_vo@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>

© Пашенко А.В., Герасимов Д.Н., Парамонов А.В., Никифоров В.О., 2022

Abstract

The problem of adaptive control of a parametrically uncertain nonlinear plant presented in a state-feedback form with unmatched uncertainties and input constraint is considered. The solution is based on adaptive backstepping procedure, in which the virtual controls includes the high-order time derivatives of adjustable parameters calculated with the use of an adaptation algorithm with improved parametric convergence. Analytical design of control with compensation for the influence of input constraints is performed using of a special filter. The approach presented in this paper allows one to design an adaptive controller that ensures the boundedness for all signals in the closed-loop system and provides tracking of the reference signal. Simulation results presented in the MATLAB/Simulink environment illustrate the performance of the presented approach and the acceleration of parametric convergence with an increase of the adaptation coefficient. The plant considered in this work describes a wide class of systems, such as various manipulation robots, technological processes, electromagnetic levitation systems, chemical processes, etc. The proposed control algorithm considers natural for practical applications input constraints and significantly reduces the influence of the regulator parameters tuning speed on the control system transient processes.

Keywords

adaptive control, backstepping, nonlinear object, input saturation, input constraint, improved parametric tuning

Aknowledgements

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-31-90103.

For citation: Pashenko A.V., Gerasimov D.N., Paramonov A.V., Nikiforov V.O. Adaptive control of nonlinear plant with unmatched parametric uncertainties and input saturation. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 3, pp. 472–479 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-3-472-479

Введение

Рассматривается задача адаптивного управления классом нелинейных каскадных систем с несогласованными параметрическими неопределенностями и ограничением на управляющее воздействие.

Впервые решение задачи адаптивного управления данным классом систем было предложено более двадцати лет назад в работе [1] и основывалось на итеративной процедуре синтеза (бэкстеппинге). Однако ввиду избыточного количества настраиваемых параметров регулятора предложенное решение не получило широкого распространения. Несколько лет спустя проблема избыточной параметризации была решена в работах [2, 3] двумя способами: за счет использования функций настройки («*tuning functions*») и модульных идентификаторов («*modular identifiers*»). Использование функций настройки позволяет устранить влияние скорости настройки параметров регулятора на переходные процессы ошибки управления, но в этом случае выбор алгоритма адаптации зависит от функции Ляпунова, применение которой ограничивает его выбор. Использование модульных идентификаторов, с одной стороны, позволило разрешить проблему достаточно свободного выбора алгоритма адаптации за счет независимого (модульного) синтеза алгоритмов управления и адаптации. С другой стороны, ошибка управления в полученной системе стала зависеть от скорости настройки параметров регулятора, что привело к сильным «всплескам» ошибок в начальные моменты времени при больших коэффициентах адаптации.

В целях устранения недостатка метода модульных идентификаторов в работе [4] предложено использование алгоритма адаптации высокого порядка [5], с помощью которого выполнен расчет старших производных настраиваемых параметров. Представленное решение позволило устранить негативное влияние скорости настройки параметров регулятора на ошибку управления, однако свойства алгоритма адаптации высокого порядка не позволяют произвольно увеличивать скорость самой настройки [6]. В связи с этим в работах [7, 9] был пред-

ложен алгоритм адаптации с улучшенной параметрической сходимостью на базе схемы Крейссельмейера [10]. Алгоритм позволил ускорить параметрическую настройку регулятора за счет увеличения коэффициента адаптации без существенных «всплесков» ошибки управления.

В настоящей работе представлено расширение предложенного в работе [9] решения задачи адаптивного управления параметрически неопределенными объектами на случай ограничения по управлению.

Постановка задачи

Рассмотрим объект, представленный в каскадной форме¹

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \mathbf{f}_i^T(x_1, x_2, \dots, x_i)\boldsymbol{\theta}, \quad i = 1, n-1, \quad (1)$$

$$\dot{x}_n = \mathbf{f}_n^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} + \beta(\mathbf{x})v(u), \quad (2)$$

$$y = x_1, \quad (3)$$

где x_i — компоненты доступного к измерению вектора состояния $\mathbf{x} \in R^n$; $y \in R$ — регулируемая переменная; $\boldsymbol{\theta} \in R^q$ — вектор неизвестных параметров; $\beta(\mathbf{x}) \in R$ и $\mathbf{f}_i \in R^q$ — непрерывные нелинейные функции², такие, что $\beta(\mathbf{x})$ отделена от нуля положительной константой b_0 , т. е. $\beta(\mathbf{x}) \geq b_0 > 0, \forall \mathbf{x}$; $u \in R$ — управляющее воздействие; $v(u)$ — ограниченное управляющее воздействие, определяемое как

$$v(u) = \text{sat}(u) = \begin{cases} \text{sign}(u)u_M & |u| \geq u_M, \\ u & |u| < u_M, \end{cases} \quad (4)$$

где $u_M > 0$ — известная константа.

¹ Здесь и далее верхним индексом «Т» обозначается операция транспонирования вектора или матрицы.

² Здесь и далее аргументы функций $\mathbf{f}_i$ и β будут опущены для простоты записи, кроме тех случаев, когда они необходимы для понимания.

Задача состоит в:

- синтезе алгоритма адаптивного управления, гарантирующего ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0, \quad (5)$$

где $r(t)$ — ограниченный достаточно гладкий сигнал задания с ограниченными n первыми производными, ε — ошибка управления;

- обеспечении возможности ускорения параметрической настройки регулятора и, как следствие, увеличения быстродействия замкнутой системы посредством увеличения коэффициента адаптации.

Сформулированная задача управления решается при следующих допущениях.

Допущение 1. Для объекта (1)–(3) выполняется условие

$$-u_M \leq u^*(t) \leq u_M, \quad \forall t \geq T_0, \quad (6)$$

где $u^*(t) = u(\theta, x(t), r(t), t)$ — гарантирующий цель (5) неадаптивный закон управления, синтезированный предложенным в настоящей работе способом при условии, что параметры объекта θ известны, T_0 — время настройки системы. $\square$

Допущение 2. Состояние объекта (1)–(3) ограничено при ограниченном входе. $\square$

Допущение 1 является естественным для большинства практических задач и означает, что сформулированная цель асимптотического слежения достижима с помощью управления, лежащего внутри заданных пределов (6) для фактических значений неизвестных параметров θ и заданного сигнала задания $r(t)$. *Допущение 2* — стандартное для задач управления с ограничением [11–13].

Адаптивное управление

Введем в рассмотрение фильтр [14]¹

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda_{i-1} - (c_i + s_i)\lambda_i + \lambda_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}_n = -\lambda_{n-1} - (c_n + s_n)\lambda_n + \beta(x)\Delta u, \quad (8)$$

где λ_i — компоненты вектора состояния фильтра; c_i — положительные константы; s_i — демпфирующие члены, вид которых определен ниже; $\Delta u(u) = v(u) - u$. Начальные условия фильтра $\lambda_i(0)$ приняты нулевыми.

Применим итеративную процедуру адаптивного бэкстеппинга [4, 9], состоящую из n шагов, на каждом из которых формируется виртуальное управление (стабилизирующая функция):

$$\alpha_1 = -(c_1 + s_1)\varepsilon - \omega_1^T \hat{\theta}, \quad (9)$$

$$\alpha_i = -(x_{i-1} - r^{(i-2)} - \alpha_{i-2}) - (c_i + s_i)(x_i - r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial r^{(j-1)}} r^{(j)} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}^{(j-1)}} \hat{\theta}^{(j)} \right] - \omega_i^T \hat{\theta}, \quad (10)$$

$$i = \overline{2, n},$$

где $\hat{\theta}$ — оценки неизвестных параметров θ ,

$$\omega_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_j} f_j, \quad (11)$$

$$s_i = d_i \|\omega_i\|^2, \quad (12)$$

d_i — положительные константы.

Рассчитаем фактическое управление:

$$u = \frac{1}{\beta(x)} (\alpha_n + r^{(n)}). \quad (13)$$

Лемма 1. Фильтр (7), (8) и настраиваемый закон управления (9)–(13) вместе с объектом (1)–(3) образуют модель ошибки замкнутой системы

$$\dot{z} = A_z z + B_z \tilde{\theta}, \quad (14)$$

$$\varepsilon = z_1 + \lambda_1, \quad (15)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — ошибка оценки неизвестных параметров, $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ — вектор состояния модели ошибки с компонентами

$$z_1 = \varepsilon - \lambda_1, \quad z_i = x_i - r^{(i-1)} - \alpha_{i-1} - \lambda_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad (16)$$

$$A_z = \begin{bmatrix} -(c_1 + s_1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -(c_2 + s_2) & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -(c_n + s_n) \end{bmatrix},$$

$$B_z = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{bmatrix}.$$

$\square$

Лемма 1 доказывается путем расчета производных $\dot{z}_i$ с учетом (16) и (9)–(13). *Лемма 1* позволяет определить условие ограниченности сигналов в модели (14), (15).

Лемма 2. Пусть справедливо *Допущение 2*. Тогда, если $\hat{\theta}$ и производные $\dot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{\theta}}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}$ ограничены, то все сигналы в модели (14), (15) ограничены. $\square$

Лемма 2 доказывается с помощью аргументов лемм в работах [4, Лемма 5.8] и [9, Лемма 2]. С помощью функции Ляпунова $V(t) = \frac{1}{2} \|z\|^2$ и ее производной, рассчитанной в силу (14), (11), (12), показывается, что из ограниченности $\hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{\theta}}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}$ в (14) следует ограниченность $\|z\|$. Из *Допущения 2* с учетом ограничений (4) следует ограниченность ε, u, x и, как следствие, управлений α_i, u и λ_i в (7), (8).

¹ Здесь и далее для простоты записи величины, чей индекс выходит за пределы допустимых значений, приняты равными нулю (например, $\lambda_0 = 0, \lambda_{n+1} = 0$ и т. п.).

Важным свойством *Лемм 1 и 2* является возможность синтеза алгоритма адаптации на основе модели ошибки (14), (15), способного обеспечить сходимость нормы $\|\mathbf{z}\|$ к нулю.

Замечание 1. В общем случае из сходимости $\|\mathbf{z}\|$ не следует сходимость ε к нулю ввиду дополнительного слагаемого λ_1 в (15). $\square$

Замечание 2. В отличие от базового решения [9] в предлагаемой модификации за счет *Допущения 2* ограниченность всех сигналов в замкнутой системе может быть обеспечена и без демпфирования, т. е. при $s_i = 0$ в (7)–(10). Однако заданные в форме (12) демпфирующие члены s_i используются для более простого расчета мажоранты нормы вектора $\|\mathbf{z}\|$, что будет продемонстрировано в дальнейшем. $\square$

Алгоритм адаптации

С целью синтеза алгоритма адаптации, который позволит ускорить параметрическую настройку регулятора с расчетом старших производных $\dot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{\theta}}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}$, с помощью леммы о перестановке [4, Приложение F] преобразуем динамическую модель ошибки (14) к статической форме.

Лемма 3. Введем в рассмотрение вспомогательные фильтры

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_z \xi + \mathbf{B}_z \hat{\theta}, \quad \xi(0) = -\mathbf{z}(0), \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{A}_z \mathbf{W} + \mathbf{B}_z, \quad \mathbf{W}(0) = 0, \quad (18)$$

используемые для получения расширенной ошибки

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \xi \quad (19)$$

из динамической модели ошибки (14). Расширенная ошибка $\bar{\mathbf{z}}$ может быть представлена как выход линейной регрессии

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{W}\hat{\theta}. \quad (20) \quad \square$$

Лемма доказывается путем расчета производной от невязки $\mathbf{e}_z = \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{W}\hat{\theta} = \mathbf{z} + \xi - \mathbf{W}\hat{\theta}$ с учетом (17)–(20):

$$\dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z \dot{\hat{\theta}} + \mathbf{A}_z \xi + \mathbf{B}_z \hat{\theta} - \mathbf{A}_z \mathbf{W}\hat{\theta} - \mathbf{B}_z \hat{\theta} =$$

$$= \mathbf{A}_z (\mathbf{z} + \xi - \mathbf{W}\hat{\theta}) + \mathbf{B}_z (\dot{\hat{\theta}} + \hat{\theta} - \hat{\theta}) = \mathbf{A}_z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_z(0) = \mathbf{z}(0) + \xi(0) - \mathbf{W}(0)\hat{\theta} = 0.$$

Из полученных выражений и структуры матрицы $\mathbf{A}_z$ следует, что $\mathbf{e}_z(t) \equiv 0$. *Лемма 3* доказана.

Замечание 3. Благодаря свойствам матрицы $\mathbf{A}_z$, матричный выход фильтра (18) $\mathbf{W}$ ограничен независимо от ограниченности матрицы $\mathbf{B}_z$. Свойство позволяет не использовать нормирующие множители в алгоритмах адаптации, использующих в качестве регрессора матрицу $\mathbf{W}$. $\square$

Линейная регрессия (20) позволяет синтезировать алгоритм адаптации на базе схемы Крейссельмейера [7–9, 15], позволяющий генерировать $\hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{\theta}}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}$ и регулировать скорость параметрической сходимости.

Для этого введем в рассмотрение устойчивую минимально-фазовую¹ передаточную функцию вида

$$L(s) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{s + \bar{a}_i} = \frac{1}{a(s)},$$

где $s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \dots + a_0$ — произвольный гурвицевый полином с вещественными корнями и постоянными коэффициентами, и на основе (20) построим регрессию вида [15, 18]

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Omega}\hat{\theta} \quad (21)$$

с динамически расширенным выходом $\mathbf{Z} = L(s)[\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{z}}]$ и матрицей регрессии $\mathbf{\Omega} = L(s)[\mathbf{W}^T \mathbf{W}]$.

Замечание 4. Из *Замечания 3* и структуры передаточной функции $L(s)$ следует, что матрица $\mathbf{\Omega}$ ограничена, симметрична и положительно полуопределена [19]. $\square$

Алгоритм адаптации, сформированный с помощью расширенной регрессии (21), может быть представлен в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma(\mathbf{Z} - \mathbf{\Omega}\hat{\theta}) \quad (22.1)$$

или, как показано в работе [19, Замечание 3.2], в форме, позволяющей явно генерировать производные $\dot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{\theta}}, \dots, \hat{\theta}^{(n)}$:

$$\hat{\theta}^{(n)} = \gamma \left(\mathbf{W}^T(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{W}\hat{\theta}) - \sum_{j=0}^{n-2} a_j(\mathbf{Z}^{(j)} - \mathbf{\Omega}^{(j)}\hat{\theta}) - \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} \mathbf{\Omega}^{(n-j-1)} \hat{\theta}^{(j)} \right), \quad (22.2)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент адаптации, $C_j^k = \frac{k!}{k!(k-j)!}$ — биномиальные коэффициенты,

$$\mathbf{Z}^{(j)} = \frac{s^j}{a(s)}[\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{z}}], \quad \mathbf{\Omega}^{(j)} = \frac{s^j}{a(s)}[\mathbf{W}^T \mathbf{W}].$$

Начальное условие $\hat{\theta}(0)$ принимается произвольным, а начальные условия $\hat{\theta}^{(i)}(0)$ — нулевыми.

Алгоритму адаптации (22) соответствует модель параметрической ошибки

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \mathbf{\Omega} \tilde{\theta}, \quad (23)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — вектор параметрических ошибок.

Сформулируем главный результат настоящей работы.

Утверждение 1. Пусть справедливы *Допущения 1 и 2*. Тогда закон управления (9)–(13) совместно с фильтром (7), (8), вспомогательными фильтрами расширения (17), (18), сигналом расширения (19) и алгоритмом адаптации (22), воздействующий на объект (1)–(3), гарантирует следующие свойства в замкнутой системе: 1) все сигналы являются ограниченными;

¹ Передаточная функция представленного вида соответствует положительным системам в смысле определения, приведенного в работах [16, 17].

- 2) вектор $\mathbf{z}(t)$ и ошибка управления ε удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{c_0 d_0}} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)\| + \|\mathbf{z}(0)\| e^{-c_0 t}, \quad (24)$$

$$|\varepsilon(t)| \leq \|\mathbf{z}(t)\| + \frac{\|\beta(\mathbf{x}(t))\Delta u(t)\|_\infty}{c_0}, \quad (25)$$

где $c_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \{c_i\}$, $d_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{d_i}\right)^{-1}$;

- 3) векторы $\mathbf{B}_z(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ сходятся к нулю при $t \rightarrow \infty$;
 4) ошибка $\varepsilon(t)$ сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ согласно равенству (5);
 5) если $\lambda_{\Omega}(t) \notin L_1$, где $\lambda_{\Omega}(t) \geq 0$ — минимальное собственное число Ω , то $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$ сходится к нулю асимптотически. Скорость сходимости $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$ может быть увеличена путем увеличения γ ;
 6) если $\lambda_{\Omega}(t) \geq \lambda_0$, $\forall t \geq T_0$, где λ_0, T_0 — некоторые положительные константы, то $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$ сходится к нулю экспоненциально. Скорость сходимости $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$ может быть увеличена произвольно путем увеличения γ .

Замечание 5. С учетом Допущения 1, Свойства 3 и 5 гарантируют ускорение асимптотической сходимости по ошибке слежения посредством увеличения коэффициента адаптации γ . $\square$

Доказательство. Ограниченность $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ следует из (23). Ограниченность $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}$ доказывается путем дифференцирования (22.1) с учетом Замечания 4 и ограниченности $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$. Таким образом, из результата Леммы 2 и Допущения 2 следует справедливость Свойства 1.

Для доказательства Свойств 3, 5 и 6 введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2$ и рассчитаем ее производную в силу (23):

$$\dot{V}_{\boldsymbol{\theta}} = -\gamma \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Omega \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq -\gamma \lambda_{\Omega}(t) \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2. \quad (26)$$

Интегрируя неравенство (26) с учетом ограниченности $V_{\boldsymbol{\theta}}(0)$ и $V_{\boldsymbol{\theta}}(\infty)$, доказываем, что $\Omega \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \in L_2$ и $\Omega(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t), \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Как следствие, на основе леммы в [2, Лемма F.4] получаем сходимость $\mathbf{B}_z(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \rightarrow 0$, $\mathbf{z}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Свойство 3 доказано. Разрешая дифференциальное неравенство (26), получаем

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)\| e^{-\gamma \int_0^t \lambda_{\Omega}(\tau) d\tau}, \quad (27)$$

откуда следуют Свойства 4 и 5.

Для доказательства Свойства 2 выберем функцию Ляпунова $V_z = \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2$ и рассчитаем ее производную в силу (14) и (12):

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{A}_z^T + \mathbf{A}_z) \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{z} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-c_i \tilde{z}_i^2 - d_i \|\omega_i\|^2 \tilde{z}_i^2 + z_i \omega_i^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \leq \\ &\leq -c_0 \|\mathbf{z}\|^2 - \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{d_i} \|\omega_i\| \tilde{z}_i - \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty}{2\sqrt{d_i}} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty^2}{4d_i} \leq -c_0 \|\mathbf{z}\|^2 + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty^2}{4d_0}.$$

Учитывая, что из (27) следует $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty = \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)\|$, перепишем последнее неравенство в форме

$$\frac{d}{dt} (\|\mathbf{z}\|^2) \leq -2c_0 \|\mathbf{z}\|^2 + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_\infty^2}{2d_0}.$$

Из решения полученного дифференциального неравенства следует (24).

Из (15) получим

$$\|\varepsilon\| = |z_1 + \lambda_1| \leq \|\mathbf{z}\| + \|\lambda\|, \quad (28)$$

где $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$. Введем в рассмотрение функцию $V_\lambda = \frac{1}{2} \|\lambda\|^2$ и вычислим ее производную, учитывая (7), (8) и структуру матрицы $\mathbf{A}_z$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\lambda &= \frac{1}{2} \lambda^T (\mathbf{A}_z^T + \mathbf{A}_z) \lambda + \lambda_n \beta(\mathbf{x}) \Delta u = \\ &= - \sum_{i=1}^n (c_i + s_i) \lambda_i^2 + \lambda_n \beta(\mathbf{x}) \Delta u \leq -c_0 \|\lambda\|^2 + \|\lambda\| \|\beta(\mathbf{x}) \Delta u\|_\infty = \\ &= -\frac{c_0}{2} \|\lambda\|^2 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_0} \|\lambda\| - \frac{1}{\sqrt{c_0}} \|\beta(\mathbf{x}) \Delta u\|_\infty \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2c_0} \|\beta(\mathbf{x}) \Delta u\|_\infty^2 \leq -\frac{c_0}{2} \|\lambda\|^2 + \frac{1}{2c_0} \|\beta(\mathbf{x}) \Delta u\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\|\lambda(t)\| \leq \frac{\|\beta(\mathbf{x}) \Delta u(t)\|_\infty}{c_0} + \|\lambda(0)\| e^{-\frac{c_0}{2} t}.$$

Подставляя последнее неравенство в (28), получим (25). Свойство 2 доказано.

Для доказательства Свойства 4 сформулируем следующую лемму.

Лемма 4. Если выполняется Свойство 3, то выполняются целевые равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i^*(t) - \alpha_i(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u^*(t) - u(t)) = 0, \quad (29)$$

$$i = \overline{1, n},$$

где $u^*(t)$ — идеальный закон управления (см. Допущение 1), формируемый путем подстановки в выражения (9), (10) и (13) $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \equiv \boldsymbol{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}(t) \equiv 0$. $\square$

Лемма 4 доказывается с помощью формирования вектора невязки с элементами $\alpha_i^*(t) - \alpha_i(t)$ с учетом Свойства 3 ($\mathbf{B}_z(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \rightarrow 0$). Следствием леммы является асимптотическое стремление адаптивного закона управления (13) к идеальному неадаптивному $u^*(t)$ из чего, с учетом Допущения 1 и структуры фильтра (7)–(8), следует справедливость равенств $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = 0$.

Принимая во внимание Свойство 2, можно утверждать справедливость равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1(t) = 0.$$

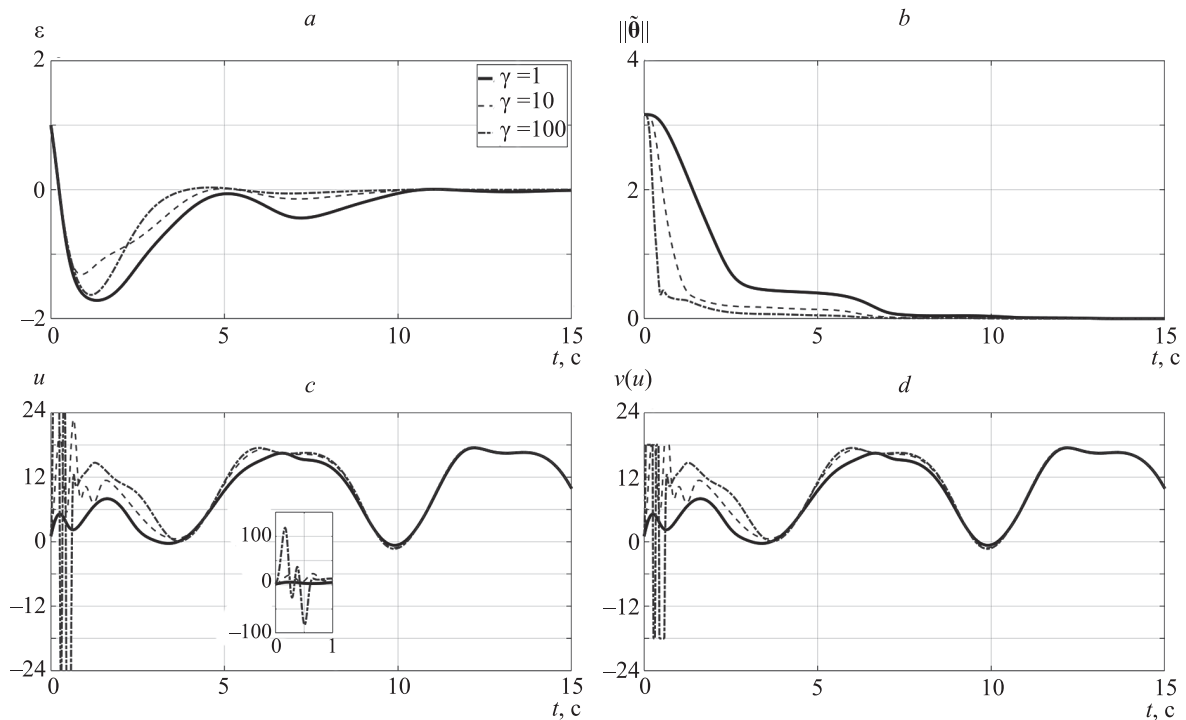


Рисунок. Переходные процессы в замкнутой системе: ошибка управления ε (a); норма ошибки оценки параметров $\|\hat{\theta}\|$ (b); управление u (c); ограниченное управление $v(u)$ (d)

Figure. Transients in the closed-loop system: control error ε (a); parameters estimation error norm $\|\hat{\theta}\|$ (b); control u (c); constrained control $v(u)$ (d)

Свойство 4 доказано. ■

Отметим следующие особенности параметрической сходимости в системе: требование $\lambda_{\Omega}(t) \geq \lambda_0$ (Свойство 5) эквивалентно условию неисчезающего возбуждения [19, Глава 3; 20], которое необходимо и достаточно для экспоненциальной сходимости оценок $\hat{\theta}(t)$ к $\theta(t)$; Свойство 4 является более слабым условием чем условие неисчезающего возбуждения в том смысле, что позволяет обеспечить асимптотическую (неэкспоненциальную) сходимость $\hat{\theta}$ даже при невыполнении условия неисчезающего возбуждения.

Моделирование

Рассмотрим нелинейный объект третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + f_1^T(x_1)\theta, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2^T(x_1, x_2)\theta, \\ \dot{x}_3 &= f_3^T(x_1, x_2, x_3)\theta + v(u), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

удовлетворяющий Допущению 2, где $\theta = -[3, 1]^T$ — вектор неизвестных параметров $f_1(x_1) = [\cos(x_1), x_1]^T$, $f_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^T$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = [x_1^2 + x_2, x_3]^T$. Порог насыщения для $v(u)$ задан константой $u_M = 18$. Начальное условие состояния объекта задано вектором $x(0) = [1, 0, 0]^T$. Начальные условия в остальных динамических подсистемах приняты нулевыми.

Адаптивный регулятор синтезирован в соответствии с законом управления (9)–(13) с $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $d_1 = d_2 =$

$= d_3 = 10^{-5}$, фильтром (7), (8), вспомогательными фильтрами расширения (17), (18), сигналом расширения (19) и алгоритмом адаптации

$$\begin{aligned}\ddot{\hat{\theta}} &= \gamma(W^T(\bar{z} - W\hat{\theta}) - (Z - \Omega\hat{\theta}) - \Omega\dot{\hat{\theta}}), \\ Z &= \frac{1}{s+1}[W^T\bar{z}], \Omega = \frac{1}{s+1}[W^T\dot{W}].\end{aligned}$$

Моделирование выполнено при различных значениях γ с целью сравнительного анализа и демонстрации улучшенной параметрической сходимости. Результаты моделирования приведены на рисунке, где показана асимптотическая сходимость ошибки управления к нулю. Из графиков (рисунок, a, b) видно, что при увеличении γ скорость настройки параметров регулятора растет и, как следствие, увеличивается скорость стремления $\varepsilon(t)$ к нулю без существенного «всплеска» в начальные моменты времени.

Заключение

В настоящей работе представлено решение задачи адаптивного управления параметрически неопределенными нелинейными объектами при нарушении условий согласования и наличии ограничений на управляющее воздействие. Решение представляет собой развитие результата, полученного в [9], и позволяет обеспечить возможность ускорения настройки регулятора за счет увеличения коэффициента адаптации γ без существенных «всплесков» ошибки управления в переходных режимах и при наличии ограничений на сигнал управ-

ления. Устранение «всплесков» достигается путем включения и последующего расчета старших производных настраиваемых параметров в закон управления.

В ходе дальнейших исследований планируется ослабить *Допущение 2* за счет доказательства ограниченности неадаптивного закона управления $u^*(t)$, выполнения

равенств (29) и, как следствие, ограниченности $\lambda_i(t)$ в (7), (8). Кроме того, теоретический и практический интерес представляет решение поставленной задачи при недоступности прямого измерению вектора состояния объекта.

Литература

1. Kanellakopoulos I., Kokotović P.V., Morse A.S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1991. V. 36. N 11. P. 1241–1253. <https://doi.org/10.23919/ACC.1991.4791451>
2. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // *Systems & Control Letters*. 1992. V. 19. N 3. P. 177–185. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(92\)90111-5](https://doi.org/10.1016/0167-6911(92)90111-5)
3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995. 563 p.
4. Nikiforov V.O., Voronov K.V. Adaptive backstepping with a high-order tuner // *Automatica*. 2001. V. 37. N 12. P. 1953–1960. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00171-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00171-6)
5. Morse A.S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems // *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*. 1992. P. 339–364. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2204-8_23
6. Ortega R. On Morse's new adaptive controller: parameter convergence and transient performance // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. V. 38. N 8. P. 1191–1202. <https://doi.org/10.1109/9.233152>
7. Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O. Improved adaptive servottracking for a class of nonlinear plants with unmatched uncertainties // *IFAC-PapersOnLine*. 2020. V. 53. N 2. P. 3835–3840. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2074>
8. Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O. Improved adaptive compensation of unmatched multisinusoidal disturbances in uncertain nonlinear plants // *Proc. of the American Control Conference (ACC 2020)*. 2020. P. 626–632. <https://doi.org/10.23919/ACC45564.2020.9147356>
9. Nikiforov V.O., Gerasimov D., Pashenko A. Modular adaptive backstepping design with a high-order tuner // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022. V. 67. N 5. P. 2663–2668 <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3091442>
10. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1977. V. 22. N 1. P. 2–8. <https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401>
11. Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H. Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2011. V. 56. N 7. P. 1672–1678. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2122730>
12. Gao Y.-F., Sun X.-M., Wen C., Wang W. Adaptive tracking control for a class of stochastic uncertain nonlinear systems with input saturation // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 62. N 5. P. 2498–2504. <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2600340>
13. Min H., Xu S., Ma Q., Zhang B., Zhang Z. Composite-observer-based output-feedback control for nonlinear time-delay systems with input saturation and its application // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2018. V. 65. N 7. P. 5856–5863. <https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2784347>
14. Zhou J., Wen C. *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations*. Springer, 2008. 241 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77807-3>
15. Gerasimov D., Nikiforov V. On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2021, in press. <https://doi.org/10.1002/acs.3311>
16. Kaczorek T. Externally and internally positive time-varying linear systems // *Proc. of the 2002 American Control Conference*. 2002. V. 6. P. 4638–4641. <https://doi.org/10.1109/ACC.2002.1025386>
17. Kaczorek T., Sajewski L. *The Realization Problem for Positive and Fractional Systems*. Springer International Publishing, 2014. 590 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-04834-5>

References

1. Kanellakopoulos I., Kokotović P.V., Morse A.S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, vol. 36, no. 11, pp. 1241–1253. <https://doi.org/10.23919/ACC.1991.4791451>
2. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, no. 3, pp. 177–185. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(92\)90111-5](https://doi.org/10.1016/0167-6911(92)90111-5)
3. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995, 563 p.
4. Nikiforov V.O., Voronov K.V. Adaptive backstepping with a high-order tuner. *Automatica*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1953–1960. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00171-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00171-6)
5. Morse A.S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems. *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*, 1992, pp. 339–364. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2204-8_23
6. Ortega R. On Morse's new adaptive controller: parameter convergence and transient performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, vol. 38, no. 8, pp. 1191–1202. <https://doi.org/10.1109/9.233152>
7. Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O. Improved adaptive servottracking for a class of nonlinear plants with unmatched uncertainties. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 3835–3840. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2074>
8. Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O. Improved adaptive compensation of unmatched multisinusoidal disturbances in uncertain nonlinear plants. *Proc. of the American Control Conference (ACC 2020)*, 2020, pp. 626–632. <https://doi.org/10.23919/ACC45564.2020.9147356>
9. Nikiforov V.O., Gerasimov D., Pashenko A. Modular adaptive backstepping design with a high-order tuner. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, vol. 67, no. 5, pp. 2663–2668 <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3091442>
10. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, vol. 22, no. 1, pp. 2–8. <https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401>
11. Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H. Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1672–1678. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2122730>
12. Gao Y.-F., Sun X.-M., Wen C., Wang W. Adaptive tracking control for a class of stochastic uncertain nonlinear systems with input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 5, pp. 2498–2504. <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2600340>
13. Min H., Xu S., Ma Q., Zhang B., Zhang Z. Composite-observer-based output-feedback control for nonlinear time-delay systems with input saturation and its application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, vol. 65, no. 7, pp. 5856–5863. <https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2784347>
14. Zhou J., Wen C. *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations*. Springer, 2008, 241 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77807-3>
15. Gerasimov D., Nikiforov V. On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2021, in press. <https://doi.org/10.1002/acs.3311>
16. Kaczorek T. Externally and internally positive time-varying linear systems. *Proc. of the 2002 American Control Conference*, 2002, vol. 6, pp. 4638–4641. <https://doi.org/10.1109/ACC.2002.1025386>
17. Kaczorek T., Sajewski L. *The Realization Problem for Positive and Fractional Systems*. Springer International Publishing, 2014, 590 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-04834-5>

18. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Annual Reviews in Control*. 2020. V. 50. P. 278–293. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.06.002>
19. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. *Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection*. Springer-Verlag, 2022, in press.
20. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. V. 1. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1996. 825 p.

18. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes. *Annual Reviews in Control*, 2020, vol. 50, pp. 278–293. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.06.002>
19. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. *Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection*. Springer-Verlag, 2022, in press.
20. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. V. 1. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1996, 825 p.

Авторы

Пашенко Артем Витальевич — инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57215657771](https://orcid.org/0000-0002-9461-8180), <https://orcid.org/0000-0002-9461-8180>, ar.vi.pashenko@gmail.com

Герасимов Дмитрий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 36637147000](https://orcid.org/0000-0001-8306-4138), <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>, dngerasimov@itmo.ru

Парамонов Алексей Владимирович — кандидат технических наук, ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 57188966696](https://orcid.org/0000-0002-6355-0670), <https://orcid.org/0000-0002-6355-0670>, avparamonov@itmo.ru

Никифоров Владимир Олегович — доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 7103218872](https://orcid.org/0000-0003-4860-5407), <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>, nikiforov_vo@itmo.ru

Authors

Artem V. Pashenko — Engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57215657771](https://orcid.org/0000-0002-9461-8180), <https://orcid.org/0000-0002-9461-8180>, ar.vi.pashenko@gmail.com

Dmitry N. Gerasimov — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 36637147000](https://orcid.org/0000-0001-8306-4138), <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>, dngerasimov@itmo.ru

Aleksei V. Paramonov — PhD, Assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 57188966696](https://orcid.org/0000-0002-6355-0670), <https://orcid.org/0000-0002-6355-0670>, avparamonov@itmo.ru

Vladimir O. Nikiforov — D. Sc., Professor, Vice-Rector for Research, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 7103218872](https://orcid.org/0000-0003-4860-5407), <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>, nikiforov_vo@itmo.ru

Статья поступила в редакцию 25.02.2022
Одобрена после рецензирования 19.03.2022
Принята к печати 15.05.2022

Received 25.02.2022
Approved after reviewing 19.03.2022
Accepted 15.05.2022



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»