

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-179-186

УДК 621.319.7.001.5

## Математическая модель эпидемии с произвольным законом восстановления

Владимир Константинович Сёменов<sup>1</sup>, Наталья Борисовна Иванова<sup>2</sup>✉

<sup>1,2</sup> Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, Иваново, 153003, Российская Федерация

<sup>1</sup> semenov\_vk@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9765-2096>

<sup>2</sup> rgr\_ivanova@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-9519-6047>

### Аннотация

**Предмет исследования.** В работе предложена математическая модель процесса эпидемии, учитывающая зависимость интенсивностей излечения и потери иммунитета от времени. На сегодняшний день большое распространение получили математические модели эпидемий, основанные на базовой модели Кермака–Маккендрика. Среди них наиболее известны модели «Восприимчивые–инфицированные–выздоровевшие» (Susceptible-Infected-Recovered, SIR) и «Восприимчивые–контактные–инфицированные–выздоровевшие» (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered, SEIR). Основу данных моделей составляет разбиение населения на отдельные группы, находящиеся в разных эпидемических состояниях. В основу описания моделей положены дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям рождения и гибели в процессе радиоактивных превращений элементов в радиоактивной цепочке. Однако подобный подход не учитывает зависимость вероятностей перехода населения из группы в группу от времени пребывания в процессе лечения и в процессе утрачивания приобретенного иммунитета. Известные модели не предусматривают анализ характера протекания эпидемии для больших промежутков времени, когда процесс может войти в стационарное состояние. **Метод.** В работе предложена математическая модель, которая основана на разбиении населения на отдельные группы. Первую группу составляют здоровые люди, подверженные инфицированию вследствие контакта с членами второй группы, в которую включается инфицированное население. Члены третьей группы находятся на лечении, к четвертой группе относятся переболевшие члены общества с антителами и привитые. Пятую группу составляют умершие члены общества. В отличие от SIR и SEIR моделей в предложенном подходе учтено, что с течением времени иммунитет утрачивается, и выжившие люди снова переходят в группу подверженных инфицированию. Учтены зависимости вероятностей перехода населения из группы в группу от времени пребывания как в процессе лечения, так и в процессе утрачивания приобретенного иммунитета. Таким образом, предложенная математическая модель основана на пяти интегро-дифференциальных уравнениях, два из которых являются уравнениями в частных производных. **Основные результаты.** Сформулирована новая математическая модель, позволяющая учитывать зависимость интенсивности излечения и вероятности перехода из вакцинированного состояния в исходное от времени нахождения в соответствующем состоянии. Показано, что предложенная модель носит автокаталитический характер. При увеличении времени наблюдается состояние бистабильности, когда при одних и тех же граничных условиях сосуществуют два стабильных состояния. Переключение между состояниями определяется найденным в работе управляющим параметром распространения эпидемии. Одно из стабильных состояний — стационарное и приводит к окончанию эпидемии, второе — к вымиранию популяции. Показано, что для стационарного режима вид функции распределения по времени лечения и времени выдержки в вакцинированном состоянии никак не сказывается на окончательном результате. Сформулированы условия подавления эпидемии для управления процессом ее развития. Проведены численные эксперименты по симуляции процесса распространения эпидемии с учетом постоянства всех переходных вероятностей. Интегрирование исходной системы уравнений осуществлено с использованием алгоритма Radaus для жестких дифференциальных уравнений. Результаты численного моделирования подтвердили соответствие экспериментальных данных теории управляющего параметра. **Практическая значимость.** Результаты работы могут применяться для организации управления процессом распространения эпидемии с целью ее скорейшего подавления за счет изменения значения управляющего параметра.

### Ключевые слова

эпидемия, математическая модель, плотность распределения по времени восстановления, бистабильное состояние, управляющий параметр, условия подавления

© Сёменов В.К., Иванова Н.Б., 2022

## A mathematical model of an epidemic with an arbitrary law of recovery

Vladimir K. Semenov<sup>1</sup>, Natalia B. Ivanova<sup>2</sup>✉

<sup>1,2</sup> Ivanovo State Power University named after V. I. Lenin, Ivanovo, 153003, Russian Federation

<sup>1</sup> semenov\_vk@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9765-2096>

<sup>2</sup> rgr\_ivanova@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-9519-6047>

### Abstract

The paper proposes a mathematical model of the epidemic process, taking into account the dependence of the rates of cure and loss of immunity on time. Today, mathematical models of epidemics based on the basic Kermack–McKendrick model have become widespread. The most famous models are Susceptible-Infected-Recovered (SIR) and Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR). These models are based on dividing the population into separate groups that are in different epidemic conditions. The description of the models is based on differential equations similar to the equations of birth and death in the process of radioactive transformations of elements in a radioactive chain. However, this approach does not take into account the dependence of the probabilities of the transition of the population from group to group on time spent in the treatment process and in the process of loss of acquired immunity. The known models do not analyze the nature of the course of the epidemic for long periods of time, when the process can enter a stationary state. The paper proposes a mathematical model based on dividing the population into separate groups. The first group consists of healthy people susceptible to infection due to contact with members of the second group, which includes the infected population. Members of the third group are being treated, the fourth group includes members of the society who have recovered with antibodies and are vaccinated. The fifth group consists of deceased members of society. In contrast to the SIR and SEIR models, the proposed approach takes into account that immunity is lost over time, and people who survived again move to the group susceptible to infection. The dependences of the probabilities of transition from group to group on time spent both during the treatment process and in the loss of acquired immunity have been taken into account. Thus, the proposed mathematical model is based on five integro-differential equations, two of which are partial differential equations. A new mathematical model has been formulated that makes it possible to take into account the dependence of the cure rate and the probability of transition from the vaccinated state to the initial state on time spent in the corresponding state. It is shown that the proposed model is autocatalytic. With increasing time, a state of bistability is observed, when, under the same boundary conditions, two stable states coexist. Switching between states is determined by the epidemic spread control parameter found in the work. One of the stable states is stationary and leads to the end of the epidemic, the second one leads to the population's extinction. It has been shown that, for the stationary regime, the form of the distribution function in terms of treatment time and exposure time in the vaccinated state does not affect the final result in any way. The conditions for suppressing the epidemic for managing the process of its development are formulated. Numerical experiments were carried out to simulate the epidemic spreading process, taking into account the constancy of all transition probabilities. Integration of the original system of equations was carried out using the Radaus algorithm for stiff differential equations. The results of numerical simulations have confirmed that the experimental data agree with the theory of the control parameter. The results of the work can be used to organize the management of the epidemic spreading process in order to suppress it as soon as possible by changing the value of the control parameter.

### Keywords

epidemic, mathematical model, distribution density over recovery time, bistable state, control parameter, suppression conditions

**For citation:** Semenov V.K., Ivanova N.B. A mathematical model of an epidemic with an arbitrary law of recovery. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 179–186 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-179-186

### Введение

Научные работы по созданию математических моделей распространения эпидемий и пандемий появились еще в тридцатые годы прошлого столетия и особенно актуальны они в настоящее время. В продолжение этих работ можно выделить несколько направлений. Одно из них связано с построением математических моделей, основанных на статистической обработке данных эпидемии, подборе по экспериментальным данным параметров статистических распределений, таких, как нормальное, распределение Пуассона, гамма-распределение и др. [1–6]. Развитием этого направления можно считать работы, посвященные анализу и прогнозированию временных рядов с использованием модели

Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA) [7–10]. Такой подход нацелен на вычислении коэффициента летальности, средней продолжительности лечения, эффективности карантинных мер и касается краткосрочных прогнозов протекания эпидемии, но не позволяет отслеживать и исследовать так называемые «волны» эпидемии.

Второе направление связано с развитием теории дифференциальных игр и основано на модели Лотки–Вольтерра, использующей два обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнения, описывающих взаимодействие в системе «паразит–хозяин» и созданных для анализа механизма этого взаимодействия [11].

Основу третьего подхода составляет базовая модель Кермака–Маккендрика — «Восприимчивые–инфи-

цированные–выздоровевшие» (Susceptible-Infected-Recovered, SIR), на основе которой сформулирована модель «Восприимчивые–контактные–инфицированные–выздоровевшие» (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered, SEIR) и другие ее модификации [12–17].

Данные модели нашли наиболее широкое применение. Остановимся на описании базовой модели, согласно которой население региона в процессе протекания эпидемии разбивается на три группы: восприимчивые к заболеванию, инфицированные и переболевшие/умершие. Передача инфекции происходит от инфицированных индивидов к восприимчивым. Считается, что переболевшие индивиды приобретают иммунитет и не могут быть заражены вторично. Модель SEIR учитывает дополнительно группу людей, находящихся в инкубационном периоде заболевания. Другие модели, основанные на базовой модели, вводят в рассмотрение новые дополнительные группы, однако это не приводит к качественным изменениям. В основу модели положена система обыкновенных дифференциальных уравнений типа рождения и гибели, записанная для общественной системы, состоящей из отдельных групп людей, переходящих из одной группы в другую в процессе развития эпидемии. Данные уравнения аналогичны уравнениям рождения и гибели, описывающим радиоактивные превращения элементов в радиоактивной цепочке. Недостаток этого подхода в том, что он не учитывает зависимость вероятностей восстановления системы от времени лечения и времени нахождения в защищенном состоянии. В частности считается, что функция распределения времени лечения пациента подчиняется экспоненциальному закону, что равносильно тому, что интенсивность излечения не зависит от его длительности. Это означает, что вероятность выздоровления инфицированного человека в единицу времени в начале процесса лечения равняется вероятности его излечения в любой промежуток времени (при условии, что процесс лечения еще не закончен). Такое допущение никогда не выполняется и вводится по причине больших математических трудностей, которые появляются при решении данной задачи. Кроме того, в этих моделях не учитывается тот факт, что с течением времени приобретенный иммунитет утрачивается, и люди из группы приобретенного иммунитета могут быть снова подвержены инфекции, т. е. считается, что время пребывания в защищенном состоянии значительно превышает время продолжительности эпидемии. Если это условие не выполняется, то процесс распространения эпидемии претерпит качественные изменения.

В настоящей работе данные допущения исключены, и считается, что интенсивность излечения — произвольная функция времени лечения. Также учтено, что вероятность перехода из защищенного состояния в исходное зависит от продолжительности действия антител. Рассмотрен практический вопрос, который выпал из внимания исследователей — определение условий окончания процесса распространения эпидемии и возможность управления ею.

В работе воспользуемся понятием системы, подразумеваемой под этим общественную формацию, состоящую из отдельных групп людей, члены которых в процессе развития эпидемии могут переходить из одной группы в другую.

Как известно, вирусная эпидемия распространяется за счет контактов здоровых людей с инфицированными, поскольку вирусы не могут размножаться вне живых клеток, так как у них отсутствует аппарат трансляции, т. е. синтеза белка. В связи с этим для построения математической модели распространения эпидемии в замкнутой системе разобьем ее на пять подсистем, каждая из которых представляется соответствующей группой населения. К группе *A* относятся все члены общества, которые не инфицированы и не защищены от инфекции и при контакте с инфицированными могут подвергнуться инфекции. Ко второй группе (*B*) относятся инфицированные люди, не находящиеся в изоляции и не проходящие лечения. Третью группу (*C*) составляют люди, находящиеся на лечении и изолированные от общества. В четвертую группу (*D*) входят вылечившиеся или привитые члены общества, а пятую группу (*E*) составляют умершие члены общества.

Для удобства формирования уравнений, описывающих переходы людей из одной группы в другую, изобразим переходы между группами в виде графа (рис. 1).

Для решения вопроса о критерии затухания эпидемии исследуем условия перехода этого процесса в стационарное состояние при неограниченном возрастании времени. Примем допущение, что система является замкнутой, т. е. число людей во всех группах остается неизменным и равным  $N_0$ . При нахождении соответствующих условий стационарности процесса основная задача — определение количества людей в каждой из перечисленных групп. Введем следующие обозначения:  $N_1(t)$  — количество людей в группе *A*;  $N_2(t)$  — в группе *B*;  $N_3(t)$  — в группе *C*;  $N_4(t)$  — в группе *D*;  $N_5(t)$  — в группе *E*;  $n_3(\tau, t) = \frac{\Delta N_3}{\Delta \tau}$  — плотность распределения людей по времени лечения  $\tau$  в группе *C*;  $n_4(\tau, t)$  — плотность распределения людей по времени нахождения  $\tau$  в группе *D*.

В качестве характеристик системы введем следующие параметры:  $\lambda_0$  — вероятность прививки, характеризующая переход одного человека за единицу времени из группы *A* в группу *D*;  $\lambda_1$  — вероятность заражения

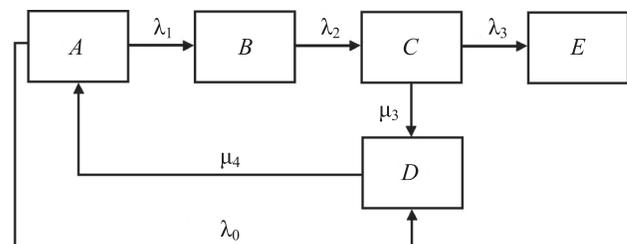


Рис. 1. Структура системы  
Fig. 1. System structure

отдельного индивидуума из группы  $A$  за единицу времени за счет контактов с зараженными из группы  $B$ . Эту вероятность представим в виде:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta N_k N_2}{\Delta t_k N_0} \varepsilon,$$

где  $\frac{\Delta N_k N_2}{\Delta t_k N_0}$  — вероятность контакта одного человека из группы  $A$  с инфицированными людьми из группы  $B$ ,  $\frac{\Delta N_k}{\Delta t_k}$  — среднее число контактов одного человека в обществе за единицу времени,  $\frac{N_2}{N_0}$  — доля инфицированных в обществе;  $\varepsilon$  — прозрачность защитного барьера, определяемая применением защитных средств,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Обозначим  $w_1 = \frac{\Delta N_k}{\Delta t_k} \varepsilon$ , тогда  $\lambda_1 = w_1 \frac{N_2}{N_0}$ ; вероятности перехода человека:  $\lambda_2$  — за единицу времени из группы  $B$  в группу  $C$  (на лечение),  $\mu_3(\tau)$  — из группы  $C$  в группу  $D$  (выздоровление),  $\mu_4(\tau)$  — из группы  $D$  в группу  $A$  (после ослабления и потери иммунитета);  $\lambda_3$  — вероятность летального исхода за единицу времени.

Исходные дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_0 N_1 - w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} + \int_0^t \mu_4(\tau) n_4(t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} - \lambda_2 N_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_3(t, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial n_3(t, \tau)}{\partial \tau} - \mu_3(\tau) n_3(t, \tau) - \lambda_3 n_3(t, \tau), \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_4(t, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial n_4(t, \tau)}{\partial \tau} - \mu_4(\tau) n_4(t, \tau), \quad (4)$$

$$\frac{dN_5}{dt} = \lambda_3 \int_0^t n_3(t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

К уравнениям (1)–(5) необходимо добавить следующие граничные и начальные условия:

$$n_4(t, \tau = 0) = \lambda_0 N_1 + \int_0^t \mu_3(\tau) n_3(t, \tau) d\tau, \quad (6)$$

$$n_3(t, \tau = 0) = \lambda_2 N_2, \quad (7)$$

$$N_2(0) = N_{20}, N_1(0) = N_0 - N_{20},$$

где  $N_{20}$  — число носителей вируса на момент начала эпидемии.

**Бистабильное состояние.** Исследуем возможность стационарного решения при  $t \rightarrow \infty$ , когда все производные по времени от искомым величин равны нулю и количество людей во всех группах не меняется:

$$-\lambda_0 N_1 - w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} + \int_0^\infty \mu_4(\tau) n_4(t, \tau) d\tau = 0, \quad (8)$$

$$w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} - \lambda_2 N_2 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial n_3(\tau)}{\partial \tau} = -\mu_3(\tau) n_3(t, \tau) - \lambda_3 n_3(t, \tau), \quad (10)$$

$$\frac{\partial n_4(\tau)}{\partial \tau} = -\mu_4(\tau) n_4(\tau), \quad (11)$$

$$\frac{dN_5}{dt} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнений (10) и (11) получим в виде:

$$n_3(\tau) = C_1 \exp\left(-\int_0^\tau [\lambda_3 + \mu_3(\tau')] d\tau'\right),$$

$$n_4(\tau) = C_2 \exp\left(-\int_0^\tau \mu_4(\tau') d\tau'\right). \quad (13)$$

Используя условия (6) и (7), находим

$$C_1 = \lambda_2 N_2, C_2 = C_1 + \lambda_0 N_1.$$

Из уравнений (5) и (12) видно, что  $N_3 = 0$ , т. е. количество людей в группе  $E$  перестанет меняться, когда в группе  $C$  никого не останется. В этом случае необходимо, учитывая условие (7), чтобы и  $N_2$  также было равно нулю.

Наличие нелинейного слагаемого в уравнении (2), с физической точки зрения, говорит о том, что процесс носит автокаталитический характер — скорость рождения числа инфицированных пропорциональна их числу. В таких процессах наблюдается явление бистабильности, когда при одних и тех же граничных условиях одновременно сосуществуют два устойчивых стационарных состояния. Выбор системой одного из них зависит от соотношения между характеризующими процесс параметрами. В этом случае введем управляющий параметр, изменяя значения которого можно производить переключения между этими состояниями при достижении параметром состояния некоторого порогового значения.

Действительно, выполнение условия (9) возможно в двух случаях: в случае  $N_2 = 0$  при произвольном  $N_1$  и в случае  $N_1 = \frac{\lambda_2}{w_1} N_0$  при произвольном  $N_2$ .

Вначале разберем случай  $N_2 = 0$ . С учетом того, что  $C_1 = 0$ , а, стало быть, и  $N_3 = 0$ , запишем условие нормировки

$$N_1 + \int_0^\infty n_4(\tau) d\tau + N_5 = N_0, \quad (14)$$

причем  $\int_0^\infty n_4(\tau) d\tau = N_4$ .

Интеграл, входящий в уравнение (8), представим в виде

$$N_4 \int_0^\infty \mu_4(\tau) \frac{n_4(t, \tau)}{N_4} d\tau = N_4 \langle \mu_4 \rangle, \quad (15)$$

где  $\langle \mu_4 \rangle$  — среднее значение вероятности возвращения одного человека из группы  $D$  в группу  $A$ . Легко показать, что эта вероятность определяется средним временем пребывания людей в группе  $D$ . Для этого найдем  $N_4$  прямым вычислением. Учитывая (13), получим

$$N_4 = \int_0^\infty n_4(\tau) d\tau = \lambda_0 N_1 \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\tau \mu_4(\tau') d\tau'\right) d\tau,$$

а интеграл возьмем по частям:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\int_0^{\tau} \mu_4(\tau') d\tau') d\tau = \int_0^{\infty} \tau \cdot \mu_4 \cdot \exp(-\int_0^{\tau} \mu_4(\tau') d\tau') d\tau = \int_0^{\infty} \tau dF = \langle \tau_4 \rangle,$$

где  $F = 1 - \exp(-\int_0^{\tau} \mu_4(\tau') d\tau')$  — функция распределения времени пребывания в защищенном от вируса состоянии;  $\langle \tau_4 \rangle$  — среднее время пребывания в защищенном состоянии. Отсюда следует, что

$$N_4 = \lambda_0 N_1 \cdot \langle \tau_4 \rangle.$$

Подставляя соотношение (15) в уравнение (8) и учитывая, что  $N_2 = 0$ , получим, что  $\lambda_0 N_1 = N_4 \cdot \langle \mu_4 \rangle$ . Поскольку  $N_4 = \lambda_0 N_1 \cdot \langle \tau_4 \rangle$ , то получим, что средняя вероятность потери иммунитета обратно пропорциональна среднему времени, прошедшему с момента вакцинации или выздоровления после болезни:

$$\langle \mu_4 \rangle = \frac{1}{\langle \tau_4 \rangle}.$$

Подставив найденное выражение для  $N_4$  в уравнение (14), получим

$$N_1 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\langle \mu_4 \rangle}\right) + N_5 = N_0.$$

Учитывая, что в стационарном случае выполняется неравенство  $N_5 \ll N_0$ , найдем долю **неинфицированных** членов общества  $\alpha = N_1/N_0$ :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\langle \mu_4 \rangle}}.$$

Итак, для этого случая  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = 0$ , а  $N_1$ ,  $N_4$  и  $N_5$  — постоянны, как того и требует стационарное состояние.

Вернемся к соотношению (9) и сравним только что полученный результат  $N_1 = \alpha N_0$  со второй возможностью  $N_1 = \frac{\lambda_2}{w_1} N_0$ , означающей, что количество зараженных людей сопоставимо с количеством восприимчивых к заражению людей. В этом случае рассмотрим так называемое переходное равновесие, когда все производные  $\frac{dN}{dt}$  равны нулю, за исключением  $\frac{dN_5}{dt}$ . При этом ни  $N_2$ , ни  $N_3$  не равны нулю, т. е. число летальных случаев с течением времени будет расти. В зависимости от соотношения между параметрами процесса осуществляться будет возможность с меньшим  $N_1$ .

**Управляющий параметр.** При выполнении условий

$$\alpha \leq \frac{\lambda_2}{w_1} \text{ или } \frac{\lambda_0}{\langle \mu_4 \rangle} \geq \frac{w_1}{\lambda_2} - 1, \quad (16)$$

процесс — стационарный, эпидемия прекратится, и в этом случае люди будут находиться только в трех группах  $A$ ,  $D$  и  $E$ , причем число умерших — минимально. Управляющим параметром является  $\frac{\lambda_0}{\langle \mu_4 \rangle}$ , а его пороговое значение —  $\frac{w_1}{\lambda_2} - 1$ . Если значение управляющего

параметра меньше порогового значения, то реализуется переходное равновесие с ростом числа летальных исходов. С ростом управляющего параметра достигается его пороговое значение, и происходит переключение на другое решение с прекращением эпидемии. Введенный критерий (16) определяет отличие одного процесса от другого и является условием прекращения эпидемии.

### Численный эксперимент

Полученные результаты положены в основу проверки расчета динамики процесса на базе решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа рождения и гибели с учетом постоянства всех вероятностей перехода между отдельными группами:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_0 N_1 - w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} + \mu_4 N_4, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = w_1 N_1 \frac{N_2}{N_0} - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \mu_3 N_3 - \lambda_3 N_3, \\ \frac{dN_4}{dt} = \lambda_0 N_1 + \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4, \\ \frac{dN_5}{dt} = \lambda_3 N_3. \end{cases}$$

Начальные условия (7) остаются прежними. Численное моделирование осуществлено в пакете Mathcad с применением алгоритма Radaus для интегрирования жестких дифференциальных уравнений. Результаты расчета представлены в безразмерном виде. В качестве масштаба численности групп использована численность всего региона  $N_0$ , а в качестве масштаба времени  $-1/w_1$ . Начальные значения  $N_1 = 0,999$  и  $N_2 = 0,001$ . Численные эксперименты проведены в широком диапазоне изменения параметров вероятностей перехода, за исключением  $\lambda_2$ , значения которого ограничены условием  $N_1 = \frac{\lambda_2}{w_1} N_0$ . Заметим, что с целью широкого варьирования параметров процесса их значения не связывались с данными процессов распространения конкретных эпидемий.

Расчеты показали, что при выполнении условия (16) эпидемия заканчивается с совпадением численности групп, предсказываемых приведенной теорией в разделе «Бистабильное состояние».

В примере №1 (рис. 2) выполнен расчет при следующих значениях характеристик системы:  $w_1 = 21$  — контакт с зараженными в сутки;  $\lambda_0 = 0,01 w_1$ ,  $\mu_3 = 0,1 w_1$ ,  $\lambda_2 = 0,7 w_1$ ,  $\mu_4 = 4,67 \times 10^{-3} w_1$ .

В примере №2 (рис. 3) изменены только значения параметров:  $\lambda_2 = 0,2 w_1$ ,  $\mu_4 = 0,01 w_1$ , остальные параметры имеют прежние значения. Это привело к тому, что неравенство (16) нарушено, и получено условие  $N_1 = \frac{\lambda_2}{w_1} N_0$ . В группах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ненулевое количество людей, но в группе  $E$  количество летальных исходов с течением времени растет, что подтверждается из-

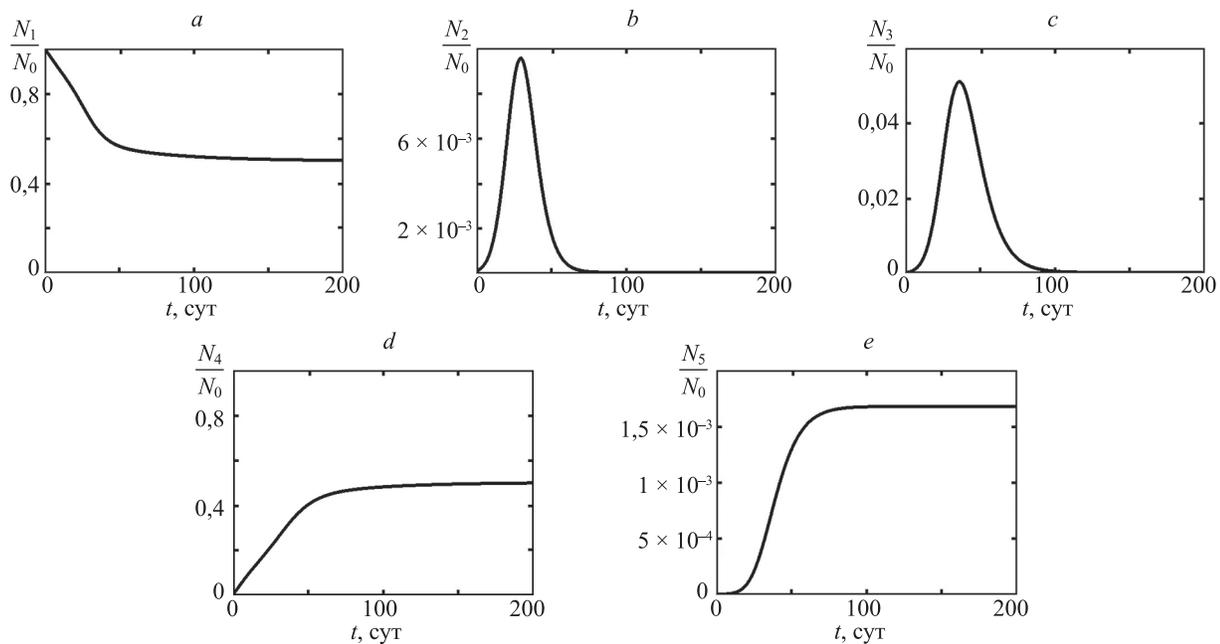


Рис. 2. Результаты примера №1 численного эксперимента для доли людей: восприимчивых к заражению (a); инфицированных (b); находящихся на лечении (c); имеющих антитела (d); умерших (e);  $t$  — время в сутках

Fig. 2. Results of the example No. 1 of a numerical experiment for the proportion of people: susceptible to infection (a); infected (b); being treated (c); having antibodies (d); deceased (e);  $t$  — time in days

ложенной теорией в разделе «Бистабильное состояние». Этому соответствует аналогия с радиоактивным семейством. В цепочке радиоактивных превращений возможно подвижное равновесие, но превращения будут происходить до тех пор, пока семейство не вымрет.

Из проведенного исследования видно, что для стационарного режима вид функций распределения по

времени лечения и выдержки в вакцинированном состоянии на окончательном результате никак не сказывается. Обычное допущение о постоянстве величин  $\mu_3$  и  $\mu_4$  приведет к правильным результатам при условии, что средние значения времен восстановления  $\langle \tau_3 \rangle = 1/\mu_3$  и  $\langle \tau_4 \rangle = 1/\mu_4$  определяются экспериментально. Вопреки распространенному мнению, что коронавирусная пан-

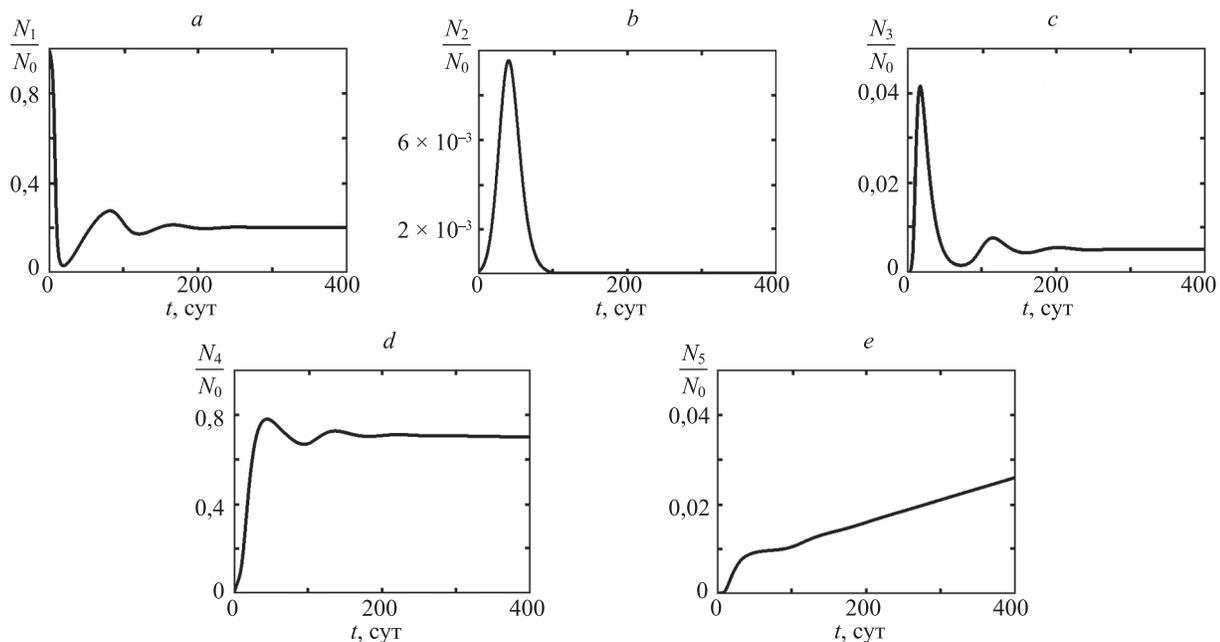


Рис. 3. Результаты примера №2 численного эксперимента для доли людей: восприимчивых к заражению (a); инфицированных (b); находящихся на лечении (c); имеющих антитела (d); умерших (e);  $t$  — время в сутках

Fig. 3. The results of the example No. 2 of a numerical experiment for the proportion of people: susceptible to infection (a); infected (b); being treated (c); having antibodies (d); deceased (e);  $t$  — time in days

демия сойдет на нет при количестве привитых 80 % от всего населения, из изложенного видно, что прекращение эпидемии, также как и численность отдельных групп, определяется значением управляющего параметра, т. е. выполнением критерия (16).

### Выводы

При расчете динамики развития эпидемии зависимость вероятностей восстановления от времени можно не учитывать, определяя их по среднему времени пребывания в данной группе.

Развитие эпидемии носит бистабильный характер и может идти по двум сценариям. При выполнении критерия (16) эпидемия закончится с минимальным количеством летальных исходов. В противном случае процесс развития эпидемии переходит в стадию переходного равновесия между отдельными группами, за исключением последней, в которой число летальных исходов непрерывно растет.

### Литература

1. Кольцова Э.М., Куркина Е.С., Васецкий А.М. Математическое моделирование распространения эпидемии коронавируса COVID-19 в Москве // *Computational nanotechnology*. 2020. Т. 7. № 1. С. 99–105. <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2020-7-1-99-105>
2. Getz W.M., Dougherty E.R. Discrete stochastic analogs of Erlang epidemic models // *Journal of Biological Dynamics*. 2018. V. 12. N 1. P. 16–38. <https://doi.org/10.1080/17513758.2017.1401677>
3. Verity R., Okell L.C., Dorigatti I., Winskill P., Whittaker C., Imai N., Cuomo-Dannenburg G., Thompson H., Walker P.G.T., Fu H., Dighe A., Griffin J.T., Baguelin M., Bhatia S., Boonyasiri A., Cori A., Cucunubá Z., FitzJohn R., Gaythorpe K., Green W., Hamlet A., Laydon D., Nedjati-Gilani G., Riley S., van Elsland S., Volz E., Wang H., Wang Y., Xi X., Donnelly C.A., Ghani A.C., Ferguson N.M. Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: a model-based analysis // *The Lancet Infectious Diseases*. 2020. V. 20. N 6. P. 669–677. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30243-7](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30243-7)
4. Kucharski A.J., Russell T.W., Diamond C., Liu Y., Edmunds J., Funk S., Eggo R.M., Sun F., Jit M., Munday J.D., Davies N., Gimma A., van Zandvoort K., Gibbs H., Hellewell J., Jarvis C.I., Clifford S., Quilty B.J., Bosse N.I., Abbott S., Klepac P., Flasche S. Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study // *The Lancet Infectious Diseases*. 2020. V. 20. N 5. P. 553–558. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30144-4](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30144-4)
5. Li R., Pei S., Chen B., Song Y., Zhang T., Yang W., Shaman J. Substantial undocumented infection facilitates the rapid dissemination of novel coronavirus (SARS-CoV-2) // *Science*. 2020. V. 368. N 6490. P. 489–493. <https://doi.org/10.1126/science.abb3221>
6. Liu Y., Gayle A.A., Wilder-Smith A., Rocklöv J. The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus // *Journal of Travel Medicine*. 2020. V. 27. N 2. P. taaa021. <https://doi.org/10.1093/jtm/taaa021>
7. Singh S., Parmar K.S., Kumar J., Makkhan S.J.S. Development of new hybrid model of discrete wavelet decomposition and autoregressive integrated moving average (ARIMA) models in application to one month forecast the casualties cases of COVID-19 // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 135. P. 109866. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109866>
8. Chakraborty T., Ghosh I. Real-time forecasts and risk assessment of novel coronavirus (COVID-19) cases: A data-driven analysis // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 135. P. 109850. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109850>
9. Srivastava A., Prasanna V.K. Learning to forecast and forecasting to learn from the COVID-19 pandemic. 2020 [Электронный ресурс].

### Заключение

В работе предложена математическая модель процесса эпидемии, учитывающая зависимость интенсивности излечения и интенсивности потери иммунитета от времени. Установлено, что для больших промежутков времени развитие эпидемии приводит к бистабильному состоянию, когда при одних и тех же граничных условиях сосуществуют два стабильных состояния, одно из которых говорит об окончании эпидемии. Достичь его можно за счет изменения значения управляющего параметра, который является характеристикой такого рода состояний. Это условие следует применять для практической борьбы с эпидемией. В дальнейшем можно исследовать динамические возможности предложенной модели в полном объеме на основе численного решения исходной системы интегро-дифференциальных уравнений.

### References

1. Koltsova E.M., Kurkina E.S., Vasetsky A.M. Mathematical modeling of the spread of COVID-19 in Moscow. *Computational nanotechnology*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 99–105. (in Russian). <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2020-7-1-99-105>
2. Getz W.M., Dougherty E.R. Discrete stochastic analogs of Erlang epidemic models. *Journal of Biological Dynamics*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 16–38. <https://doi.org/10.1080/17513758.2017.1401677>
3. Verity R., Okell L.C., Dorigatti I., Winskill P., Whittaker C., Imai N., Cuomo-Dannenburg G., Thompson H., Walker P.G.T., Fu H., Dighe A., Griffin J.T., Baguelin M., Bhatia S., Boonyasiri A., Cori A., Cucunubá Z., FitzJohn R., Gaythorpe K., Green W., Hamlet A., Laydon D., Nedjati-Gilani G., Riley S., van Elsland S., Volz E., Wang H., Wang Y., Xi X., Donnelly C.A., Ghani A.C., Ferguson N.M. Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: a model-based analysis. *The Lancet Infectious Diseases*, 2020, vol. 20, no. 6, pp. 669–677. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30243-7](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30243-7)
4. Kucharski A.J., Russell T.W., Diamond C., Liu Y., Edmunds J., Funk S., Eggo R.M., Sun F., Jit M., Munday J.D., Davies N., Gimma A., van Zandvoort K., Gibbs H., Hellewell J., Jarvis C.I., Clifford S., Quilty B.J., Bosse N.I., Abbott S., Klepac P., Flasche S. Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study. *The Lancet Infectious Diseases*, 2020, vol. 20, no. 5, pp. 553–558. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30144-4](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30144-4)
5. Li R., Pei S., Chen B., Song Y., Zhang T., Yang W., Shaman J. Substantial undocumented infection facilitates the rapid dissemination of novel coronavirus (SARS-CoV-2). *Science*, 2020, vol. 368, no. 6490, pp. 489–493. <https://doi.org/10.1126/science.abb3221>
6. Liu Y., Gayle A.A., Wilder-Smith A., Rocklöv J. The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus. *Journal of Travel Medicine*, 2020, vol. 27, no. 2, pp. taaa021. <https://doi.org/10.1093/jtm/taaa021>
7. Singh S., Parmar K.S., Kumar J., Makkhan S.J.S. Development of new hybrid model of discrete wavelet decomposition and autoregressive integrated moving average (ARIMA) models in application to one month forecast the casualties cases of COVID-19. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 135, pp. 109866. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109866>
8. Chakraborty T., Ghosh I. Real-time forecasts and risk assessment of novel coronavirus (COVID-19) cases: A data-driven analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 135, pp. 109850. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109850>
9. Srivastava A., Prasanna V.K. *Learning to forecast and forecasting to learn from the COVID-19 PANDEMIC*. 2020. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2004.11372.pdf> (accessed: 01.12.2021).

- URL: <https://arxiv.org/pdf/2004.11372.pdf>, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 01.12.2021).
10. Perone G. ARIMA forecasting of COVID-19 incidence in Italy, Russia, and the USA. 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2006.01754.pdf>, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 01.12.2021).
  11. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88>
  12. Томчин Д.А., Фрадков А.Л. Прогнозирование распространения вируса COVID-19 в России на основе простых математических моделей эпидемий. 2020. [Электронный ресурс]. URL: <http://onr-russia.ru/sites/default/files/ft20-5.pdf>, свободный. Яз. рус. (дата обращения: 01.11.2021).
  13. Криворот'ко О.И., Кabanikhin С.И., Зят'ков Н.Ю., Приходько А., Прохoshin Н., Шишленin М.А. Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // Сибирский журнал вычислительной математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 395–414. <https://doi.org/10.15372/SJNM20200404>
  14. Ed Fontes. Моделирование в Comsol Multiphysics® распространения вируса Covid-19. 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.comsol.ru/blogs/modeling-the-spread-of-covid-19-with-comsol-multiphysics/>, свободный. (дата обращения: 01.11.2021).
  15. Weiss H. The SIR model and the Foundations of Public Health // MATerials MATemàtics. 2013. V. 2013. N 3. P. 17 [Электронный ресурс]. URL: [https://mat.uab.cat/matmat\\_antiga/PDFv2013/v2013n03.pdf](https://mat.uab.cat/matmat_antiga/PDFv2013/v2013n03.pdf), свободный. Яз. англ. (дата обращения: 01.11.2021).
  16. Barmparis G.D., Tsironis G.P. Estimating the infection horizon of COVID-19 in eight countries with a data-driven approach // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 135. P. 109842. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109842>
  17. Teles P. A time-dependent SEIR model to analyse the evolution of the SARS-CoV-2 epidemic outbreak in Portugal. 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2004.04735.pdf>, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 01.12.2021).
  18. Perone G. ARIMA forecasting of COVID-19 incidence in Italy, Russia, and the USA. 2020. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2006.01754.pdf> (accessed: 01.12.2021).
  19. Trubetskov D.I. Phenomenon of Lotka-Volterra mathematical model and similar models. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika*, 2011, vol. 19, no. 2, pp. 69–88. (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88>
  20. Tomchin D., Fradkov A. Prediction of the virus COVID-19 spread in Russia based on simple mathematical models of epidemics. 2020. Available at: <http://onr-russia.ru/sites/default/files/ft20-5.pdf> (accessed: 01.11.2021). (in Russian)
  21. Krivorot'ko O.I., Kabanikhin S.I., Zyat'kov N.Y., Prikhod'ko A.Y., Shishlenin M.A., Prokoshin N.M. Mathematical modeling and forecasting of COVID-19 in Moscow and Novosibirsk Region. *Numerical Analysis and Applications*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 332–348. <https://doi.org/10.1134/S1995423920040047>
  22. Ed Fontes. Modeling the Spread of COVID-19 with COMSOL Multiphysics®. Available at: <https://www.comsol.ru/blogs/modeling-the-spread-of-covid-19-with-comsol-multiphysics/> (accessed: 01.11.2021).
  23. Weiss H. The SIR model and the Foundations of Public Health. *MATerials MATemàtics*, 2013, vol. 2013, no. 3, pp. 17. Available at: [https://mat.uab.cat/matmat\\_antiga/PDFv2013/v2013n03.pdf](https://mat.uab.cat/matmat_antiga/PDFv2013/v2013n03.pdf) (accessed: 01.11.2021).
  24. Barmparis G.D., Tsironis G.P. Estimating the infection horizon of COVID-19 in eight countries with a data-driven approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 135, pp. 109842. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109842>
  25. Teles P. A time-dependent SEIR model to analyse the evolution of the SARS-CoV-2 epidemic outbreak in Portugal. 2020. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2004.04735.pdf> (accessed: 01.12.2021).

## Авторы

**Семёнов Владимир Константинович** — доктор технических наук, профессор, профессор, Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, Иваново, 153003, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0001-9765-2096>, [semenov\\_vk@mail.ru](mailto:semenov_vk@mail.ru)  
**Иванова Наталья Борисовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, Иваново, 153003, Российская Федерация, [sc 57210732707](https://orcid.org/0000-0002-9519-6047), <https://orcid.org/0000-0002-9519-6047>, [igr\\_ivanova@rambler.ru](mailto:igr_ivanova@rambler.ru)

Статья поступила в редакцию 15.11.2021  
 Одобрена после рецензирования 23.12.2021  
 Принята к печати 20.01.2022

## Authors

**Vladimir K. Semenov** — D.Sc., Full Professor, Ivanovo State Power University named after V. I. Lenin, Ivanovo, 153003, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0001-9765-2096>, [semenov\\_vk@mail.ru](mailto:semenov_vk@mail.ru)

**Natalia B. Ivanova** — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Ivanovo State Power University named after V. I. Lenin, Ivanovo, 153003, Russian Federation, [sc 57210732707](https://orcid.org/0000-0002-9519-6047), <https://orcid.org/0000-0002-9519-6047>, [igr\\_ivanova@rambler.ru](mailto:igr_ivanova@rambler.ru)

Received 15.11.2021  
 Approved after reviewing 23.12.2021  
 Accepted 20.01.2022



Работа доступна по лицензии  
 Creative Commons  
 «Attribution-NonCommercial»