

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636

УДК 519.63

Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины

Михаил Васильевич Сухотерин¹✉, Анна Анатольевна Сосновская²

^{1,2} Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская федерация

¹ sukhoterimv@gumrf.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>

² sosnovskayaaa@gumrf.ru, <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>

Аннотация

Введение. Изучен спектр критических нагрузок и форм равновесия CCCC-нанопластины (C — clamped edge, защемленный край) при различных значениях нелокального нанопараметра. **Метод.** Симметричные формы представлены двумя гипербола-тригонометрическими рядами по двум координатам, которые подчинялись основному дифференциальному уравнению физического состояния А.Д. Эрингена. Граничные условия отсутствия прогибов и углов поворота защемленных граней были удовлетворены полностью. В результате получена однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов гипербола-тригонометрических рядов, содержащая в качестве основного параметра относительную сжимающую нагрузку. Преобразованная система включает только одну последовательность коэффициентов. Построен итерационный процесс поиска нетривиального решения в сочетании с методом перебора величины нагрузки. **Основные результаты.** Для каждого значения нелокального параметра найдены первые четыре критические нагрузки для симметричных форм закритического равновесия и получены их 3D-изображения. Установлено, что критические нагрузки убывали с ростом нелокального параметра. Исследовано влияние на точность результатов количества членов, удерживаемых в рядах, и числа итераций. **Обсуждение.** Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных наноразмерных smart-конструкций.

Ключевые слова

прямоугольная CCCC-нанопластина, теория Эрингена, спектр критических нагрузок, ряды Фурье

Ссылка для цитирования: Сухотерин М.В., Сосновская А.А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 4. С. 629–636. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636

Instability of a rectangular CCCC-nanoplate

Mikhail V. Sukhoterin¹✉, Anna A. Sosnovskaya²

^{1,2} Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

¹ sukhoterimv@gumrf.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>

² sosnovskayaaa@gumrf.ru, <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>

Abstract

The spectrum of critical loads and equilibrium forms of a CCCC-nanoplate (C — clamped edge) at various values of a non-local nanoparameter has been studied. The symmetric solution is represented by two hyperbolic-trigonometric series in two coordinates which obeyed the basic differential equation of the physical state of Eringen. The boundary conditions for the absence of deflections and angles of rotation of the pinched faces were precisely satisfied. As a result, a homogeneous infinite system of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients of these series is obtained containing a relative compressive load as the main parameter. After the conversion, the system began to contain only one sequence of coefficients. An iterative process of searching for a non-trivial solution in combination with the method of iterating over the load value is constructed. For each value of the nonlocal parameter, the first four critical loads for symmetric forms of supercritical equilibrium are found and their 3D images are obtained. It was found

© Сухотерин М.В., Сосновская А.А., 2024

that critical loads decreased with an increase in the nonlocal parameter. The influence of the number of members held in rows and the number of iterations on the accuracy of the results is investigated. The results obtained can be used in the design of various nanoscale smart structures.

Keywords

rectangular CCCC-nanoplate, Eringen theory, critical load spectrum, Fourier series

For citation: Sukhoterina M.V., Sosnovskaya A.A. Instability of a rectangular CCCC-nanoplate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 4, pp. 629–636 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636

Введение

Многочисленные исследования в области деформирования наноразмерных балок, пластин и оболочек, а также дискретных наноструктур (нанотрубок, графена) появились после публикации ряда работ турецкого ученого Ахмета Джемала (Кемаля) Эрингена, а также его монографии [1]. Эрингеном были получены уравнения физического состояния в интегральной и дифференциальной формах, в которых присутствует так называемый нелокальный параметр, учитывающий размерный эффект нанобъекта (размер гранул, расстояние между атомами, внешние размеры), свойства материала и влияние соседних точек на напряженно-деформированное состояние.

Приведем эти две формы уравнений:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tilde{\epsilon}) \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'),$$

$$[1 - (e_0 A)^2 \nabla^2] \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}).$$

Здесь $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ — тензор напряжений нелокальной теории; V — объем области; $K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tilde{\epsilon})$ — функция влияния (ядро Гельмгольца), которая быстро убывает по мере удаления точки влияния $\mathbf{x}'$ от рассматриваемой точки $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$; $\tilde{\epsilon} = e_0 A / l_c$ — безразмерный нелокальный параметр; e_0 — безразмерная нелокальная упругая константа Эрингена (находится экспериментально для каждого материала или путем сопоставления дисперсионных кривых плоских волн с кривыми динамики атомной решетки); A — внутренний характерный размер (размер гранул, расстояние между атомами дискретной структуры); ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; l_c — внешний характерный размер нанобъекта (например, длина, ширина или высота); $\sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x})$ — тензор напряжений классической теории.

Эрингеном найдено значение константы $e_0 = 0,39$. В работе [2] методом градиента деформации получено значение $e_0 = 0,288$. Нулевое значение нелокального параметра соответствует обычной классической теории пластин и оболочек. Рост этого параметра [3] приводит к росту прогибов и снижению собственных частот колебаний и критических нагрузок при потере устойчивости. В работе [4] показано, что дифференциальное уравнение Эрингена не вполне корректно, так как оно не учитывает краевые эффекты нанобъекта. В том числе отмечено, что интегральная форма, которая учитывает краевые эффекты, приводит к сложному и не всегда реализуемому процессу поиска решения. Эрингеном [1] предложено также смешанное уравнение, учитывающее как локальный, так и нелокальный параметры:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \xi \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}) + (1 - \xi) \int_V K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tilde{\epsilon}) \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'),$$

где $\xi \in [0; 1]$ — коэффициент, учитывающий долю локальной составляющей закона физического состояния.

Предмет исследования

Важной задачей теории нанопластин является задача устойчивости при двухосном сжатии ее сторон равномерной нагрузкой от воздействия электрического или магнитного полей. В работах [5–9] предложено решение данной задачи энергетическими методами. В [5] рассмотрен прямоугольный однослойный лист графена переменной толщины со свободно опертыми кромками (SSSS-пластина, S — supported edge, опертый край). Критические нагрузки для различных значений нелокального параметра определялись из условия минимума потенциальной энергии пластины, а также с использованием метода Галеркина. В работе [6] задача колебаний и устойчивости нанопластины на упругом основании решалась методом Ритца. Отметим, что в перечисленных работах рассматривались пластины с различными граничными условиями. Работа [7] посвящена устойчивости в магнитном поле магнито-электроупругой функционально градуированной нанопластины с пьезоэлектрическим приводом (актуатором). Для решения использовались тригонометрические функции. В [8] применен энергетический итерационный метод разделения переменных, основанный на соотношении Рэлея: вариация энергии деформации приравнивалась работе критической силы на возможном перемещении. Рассматривались различные граничные условия (пяти видов). Отношение сторон пластины принято равным 0,5, 1 и 2. Получены численные результаты для эйлеровых критических нагрузок в зависимости от значений нелокального параметра.

В работе [9] применен метод Рэлея–Ритца в сочетании с принципом Гамильтона и учтено влияние деформации поперечного сдвига в нанопластинах средней толщины.

В [10] использован симплектический метод в сочетании с методом суперпозиции. Исследована консольная пластина на упругом основании, грани которой сжимаются плоским магнитным полем. В работах [11–13] применен метод дифференциальных квадратур, с помощью которого решалась задача устойчивости однослойного листа графена [11, 12] и ортотропной нанопластины на упругом основании [13].

В [14] использован метод конечных полос в сочетании с принципом виртуальной работы. Исследованы ортотропные нанопластины при двух- и одноосном

сжатиях, а также при чистом сдвиге, с различными граничными условиями, включая условия защемленного контура. В [15] применен метод конечных разностей. Получены 3D-формы потери устойчивости для первых трех критических нагрузок SSSS- и CCCC-нанопластин С — clamped edge, защемленный край). В работе [16] задача устойчивости функционально-градуированных SSSS-нанопластин на упругом основании при биаксиальной нагрузке решена с помощью принципа Гамильтона.

Применение различных приближенных методов оставляет открытым вопрос о точности вычислений критических нагрузок. Для нанопластин, обладающих высокой упругостью, необходимо знать некоторый спектр критических нагрузок и соответствующих форм, что может использоваться в создании различных датчиков.

В настоящей работе для определения спектра критических нагрузок и соответствующих форм равновесия CCCC-нанопластин в рамках нелокальной теории Эрингена (дифференциальная форма) использовался итерационный метод в сочетании с методом перебора параметра нагрузки (метод «стрельбы») [17, 18]. Искомая функция прогибов представлена двумя гипербола-тригонометрическими рядами. Это позволило с высокой точностью определить первые четыре критические нагрузки симметричных форм равновесия для ряда значений нелокального параметра.

Постановка задачи

Рассмотрим защемленную по контуру прямоугольную нанопластину постоянной толщины h с размерами $a \times b$ (CCCC-нанопластина). Начало координат разместим в центре пластины, оси направим параллельно ее сторонам. Пусть в своей плоскости нанопластина сжимается двухосными равномерно распределенными усилиями (биаксиальная нагрузка) одинаковой интенсивности $N_x = N_y = N$, приложенными ко всем граням (рис. 1).

Биаксиальная нагрузка может иметь место, когда нанопластина находится в магнитном или электрическом поле.

Дифференциальное уравнение равновесия нанопластины после потери устойчивости от действия критической сжимающей нагрузки N имеет вид [8]:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N\nabla^2 w - \varepsilon^* N\nabla^2\nabla^2 w = 0, \quad (1)$$

где w — прогиб пластины (по оси oz); $D = Eh^3[12(1 - \nu^2)]$ — изгибная жесткость; E — модуль упругости Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $\varepsilon^* = (e_0 A)^2$ — постоянная наноматериала. Последнее слагаемое в формуле (1) учитывает влияние наноразмеров пластины. Если $e_0 A = 0$, то получим уравнение устойчивости классической теории пластин. Рабочий диапазон 0–2 нм (нанометра) изменения нелокального параметра $e_0 A$ для нанопластин впервые введен в работе [19].

Перейдем к безразмерным координатам $x = X/b$, $y = Y/b$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\nabla^2\nabla^2 w + P\nabla^2 w - \varepsilon P\nabla^2\nabla^2 w = 0, \quad (2)$$

где $P = Nb^2/D$ — безразмерная интенсивность сжимающих усилий; $\varepsilon = \varepsilon^*/b^2$ — безразмерная постоянная на-

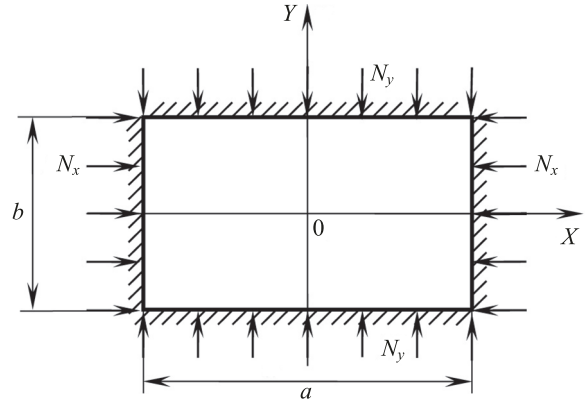


Рис. 1. Схема сжимающей нагрузки CCCC-нанопластины

Fig. 1. CCCC-nanoplate compressive load diagram

номатериала. В данном случае относительные размеры нанопластины: $x \in [-\gamma/2, \gamma/2]$, $y \in [-1/2, 1/2]$, где $\gamma = a/b$.

Граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \partial w / \partial x \text{ на гранях } x = \pm \gamma/2, \quad (3)$$

$$w = 0, \quad \partial w / \partial y \text{ на гранях } y = \pm 1/2. \quad (4)$$

Равенство нулю производных на контуре означает, что углы поворота защемленных граней должны быть равны нулю.

Построение решения

Высокоупругие нанопластины с ростом сжимающей нагрузки могут несколько раз терять устойчивость, меняя формы закритического равновесия. Эти формы могут быть симметричными относительно осей координат, антисимметричными и смешанными. Найдем критические усилия, которые приводят к симметричным формам равновесия нагрузок. Первая (эйлерова) критическая нагрузка должна давать симметричную форму, подобную форме изгиба нанопластины под действием равномерной поперечной нагрузки. Антисимметричные и смешанные формы равновесия и соответствующие критические значения изучим отдельно.

Прогиб нанопластины выберем в виде суммы двух функциональных рядов с четными функциями:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k \operatorname{ch}(\alpha_k x) \cos(\lambda_k y), \quad (5)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s \operatorname{ch}(\xi_s y) \cos(\mu_s x), \quad (6)$$

где A_k , α_k , C_s , ξ_s — искомые коэффициенты; $\lambda_k = k\pi$; $\mu_s = s\pi/\gamma$; $k = (k+2)/2$; $\tilde{s} = (s+1)/2$.

Выбор коэффициентов λ_k и μ_s обусловлен тем, что на концах нанопластины $y = \pm 1/2$ и $x = \pm \gamma/2$ соответствующие косинусы должны обращаться в нуль, а это возможно, если индексы k и s нечетные. Нечетность этих индексов (и исключение четных) может быть обеспечена при разложении гиперболических функций в ряды Фурье по косинусам при условии антисимметричного продолжения этих функций на «фиктивных» отрезках $[1/2, 1]$ и $[\gamma/2, \gamma]$. Другими словами, для разложения

рассматриваются отрезки двойной длины и ширины $[-\gamma, \gamma]$, $[-1, 1]$. Заметим, что в центре пластины оба тригонометрических косинуса дают единицу.

Каждый из рядов (5) и (6) подчиним основному уравнению (2) задачи. Это даст два биквадратных уравнения для определения коэффициентов α_k и ξ_s :

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon P)\alpha_k^4 + [P - 2(1 - \varepsilon P)\lambda_k^2]\alpha_k^2 - P\lambda_k^2 + (1 - \varepsilon P)\lambda_k^4 &= 0, \\ (1 - \varepsilon P)\xi_s^4 + [P - 2(1 - \varepsilon P)\mu_s^2]\xi_s^2 - P\mu_s^2 + (1 - \varepsilon P)\mu_s^4 &= 0,\end{aligned}$$

решение которых

$$\begin{aligned}\alpha_{k1} &= \lambda_k, \alpha_{k2} = \sqrt{\lambda_k^2 - P/(1 - \varepsilon P)}, \\ \xi_{s1} &= \mu_s, \xi_{s2} = \sqrt{\mu_s^2 - P/(1 - \varepsilon P)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Отрицательные корни не будем учитывать в силу четности решения.

С учетом полученных корней функции (5) и (6) запишем в виде:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k [A_k \operatorname{ch}(\alpha_{k1}x) + B_k \operatorname{ch}(\alpha_{k2}x)] \cos(\lambda_k y), \quad (8)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s [C_s \operatorname{ch}(\xi_{s1}y) + D_s \operatorname{ch}(\xi_{s2}y)] \cos(\mu_s x), \quad (9)$$

где B_k и D_s — неопределенные коэффициенты.

Если потребовать, чтобы функция (8) обращалась в нуль на гранях $x = \pm \gamma/2$, а функция (9) — на гранях $y = \pm 1/2$, то для неопределенных коэффициентов получим соотношения

$$B_k = -A_k \operatorname{ch} \alpha_{k1}^* / \operatorname{ch} \alpha_{k2}^*, \quad D_s = -C_s \operatorname{ch} \xi_{s1}^* / \operatorname{ch} \xi_{s2}^*,$$

где $\alpha_{k1}^* = \alpha_{k1}\gamma/2$, $\alpha_{k2}^* = \alpha_{k2}\gamma/2$, $\xi_{s1}^* = \xi_{s1}/2$, $\xi_{s2}^* = \xi_{s2}/2$.

В результате ряды (8) и (9) примут вид:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha_{k1}x)}{\operatorname{ch} \alpha_{k1}^*} - \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{k2}x)}{\operatorname{ch} \alpha_{k2}^*} \right] \cos(\lambda_k y), \quad (10)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left[\frac{\operatorname{ch}(\xi_{s1}y)}{\operatorname{ch} \xi_{s1}^*} - \frac{\operatorname{ch}(\xi_{s2}y)}{\operatorname{ch} \xi_{s2}^*} \right] \cos(\mu_s x), \quad (11)$$

где $A_k^* = A_k \operatorname{ch} \alpha_{k1}^*$, $C_s^* = C_s \operatorname{ch} \xi_{s1}^*$.

Потребуем, чтобы были равны нулю и углы поворота на краях нанопластины, т. е. выполнялись вторые условия (3), (4). Тогда получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k A_k^* (\alpha_{k1} \operatorname{th} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{th} \alpha_{k2}^*) \cos(\lambda_k y) + \\ + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} C_s^* \mu_s \left[\frac{\operatorname{ch}(\xi_{s1}y)}{\operatorname{ch} \xi_{s1}^*} - \frac{\operatorname{ch}(\xi_{s2}y)}{\operatorname{ch} \xi_{s2}^*} \right] = 0, \\ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k^* \lambda_k \left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha_{k1}x)}{\operatorname{ch} \alpha_{k1}^*} - \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{k2}x)}{\operatorname{ch} \alpha_{k2}^*} \right] + \\ + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s^* (\xi_{s1} \operatorname{th} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{th} \xi_{s2}^*) \cos(\mu_s x) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для упрощения системы (12) разложим гиперболические функции в ряды Фурье по косинусам. Эти разложения имеют вид [16, 17]:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \xi_{s1} y &= -4 \operatorname{ch} \xi_{s1}^* \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\xi_{s1}^2 + \lambda_k^2}, \\ \operatorname{ch} \xi_{s2} y &= -4 \operatorname{ch} \xi_{s2}^* \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\xi_{s2}^2 + \lambda_k^2}, \\ \operatorname{ch} \alpha_{k1} x &= -\frac{4}{\gamma} \operatorname{ch} \alpha_{k1}^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \cos \mu_s x}{\alpha_{k1}^2 + \mu_s^2}, \\ \operatorname{ch} \alpha_{k2} x &= -\frac{4}{\gamma} \operatorname{ch} \alpha_{k2}^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s \cos \mu_s x}{\alpha_{k2}^2 + \mu_s^2}.\end{aligned}$$

Как было отмечено, гиперболические функции на «фиктивных» отрезках $[1/2, 1]$ и $[\gamma/2, \gamma]$ при разложении необходимо дополнить своими антисимметричными выражениями относительно точек $y = 1/2$ и $x = \gamma/2$. В итоге это позволило получить простые разложения, не содержащие четных гармоник. Именно поэтому и в рядах (5), (6) нет четных гармоник.

Подставим разложения в систему (12) и переставим знаки суммирования в двойных суммах. После освобождения от знака внешней суммы система упростится:

$$\begin{cases} A_k^* (\alpha_{k1} \operatorname{th} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{th} \alpha_{k2}^*) + \\ + 4 \lambda_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} C_s^* \mu_s \frac{\xi_{s1}^2 - \xi_{s2}^2}{(\xi_{s1}^2 + \lambda_k^2)(\xi_{s2}^2 + \lambda_k^2)} = 0, \\ \frac{4}{\gamma} \mu_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k^* \lambda_k \frac{\alpha_{k1}^2 - \alpha_{k2}^2}{(\alpha_{k1}^2 + \mu_s^2)(\alpha_{k2}^2 + \mu_s^2)} + \\ + C_s^* (\xi_{s1} \operatorname{th} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{th} \xi_{s2}^*) = 0. \end{cases}$$

Из (7) следует, что $\xi_{s1}^2 - \xi_{s2}^2 = \alpha_{k1}^2 - \alpha_{k2}^2 = P/(1 - \varepsilon P)$, тогда получим

$$\begin{cases} A_k^* = -4 \frac{P}{1 - \varepsilon P} \frac{\lambda_k}{\varphi_k} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{C_s^* \mu_s}{\sigma_{ks} \left(\sigma_{ks} - \frac{P}{1 - \varepsilon P} \right)}, \\ C_s^* = -\frac{4}{\gamma} \frac{P}{1 - \varepsilon P} \frac{\mu_s}{\theta_s} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_k^* \lambda_k}{\sigma_{ks} \left(\sigma_{ks} - \frac{P}{1 - \varepsilon P} \right)} \end{cases} \quad (13)$$

где $\varphi_k = \alpha_{k1} \operatorname{th} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{th} \alpha_{k2}^*$, $\theta_s = \xi_{s1} \operatorname{th} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{th} \xi_{s2}^*$, $\sigma_{ks} = \lambda_k^2 + \mu_s^2$.

Если подставить вторую формулу системы уравнений (13) в первую, то разрешающая бесконечная система примет вид

$$\begin{aligned}A_K^* &= \frac{16P^2}{\gamma(1 - \varepsilon P)^2} \frac{\lambda_K}{\varphi_K} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{\theta_s} \frac{1}{\sigma_{Ks} \left(\sigma_{Ks} - \frac{P}{1 - \varepsilon P} \right)} \times \\ &\times \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k A_k^*}{\left(\sigma_{ks} - \frac{P}{1 - \varepsilon P} \right)}, \quad K = 1, 3, \dots\end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) представляет собой однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности коэффициентов A_k^* . Система (14) приведена к стандартному виду: неизвестные коэффициенты фигурируют и в левой части (обособлено), и под знаком внутренней суммы в правой, что позволяет организовать итерационный процесс нахождения нетривиальных решений вместо требования обращения в нуль определителя системы. Коэффициенты в правой части можно считать предыдущей итерацией, а в левой — последующей. Система (14) содержит в качестве параметра неизвестную критическую нагрузку P , которую можно перебирать методом «стрельбы» до получения нетривиальных решений системы.

Численные результаты моделирования. Обсуждение

Для решения системы (14) разработана программа в среде аналитических вычислений Maple. Исходными данными являются отношение сторон нанопластины, число итераций, количество членов, удерживаемых в рядах (размер редуцированной системы), постоянная наноматериала $\varepsilon = (e_0A)^2/b^2$, величина сжимающей нагрузки. Начальные значения коэффициентов A_{k0}^* заданы в виде убывающей последовательности $1/\lambda_k^2$. Новые коэффициенты A_{ki}^* распечатывались на каждой i -ой итерации. Если по итерациям они убывали или возрастали, то назначалось новое значение нагрузки. При критическом значении, начиная с некоторой итерации, соответствующие коэффициенты предыдущей итерации и последующей не отличались (и были не равны нулю).

В качестве примера рассмотрим квадратную нанопластину размером 5×5 нм. Нелокальный параметр e_0A назначим в пределах 0–2 нм, согласно [19], с шагом 0,25. Для оценки точности вычислений число членов в рядах в контрольном варианте было увеличено от 59 до 109, число итераций — от 15 до 30, количество значащих цифр в вычислениях — от 10 до 50. Окончательно в рядах удерживалось 99 членов, число итераций принималось равным 25, количество значащих цифр — 30. Дальнейшее увеличение этих параметров не изменяло первые пять значащих цифр искомых коэффициентов.

В таблице представлен найденный спектр из первых четырех критических нагрузок квадратной нанопластины для ряда значений нелокального параметра e_0A .

Критические нагрузки P_{1cr} и P_{2cr} для квадратной пластины Кирхгоффа совпали с результатами работы [17], где использовался данный метод.

Для сравнения в последней строке таблицы приведены результаты (пять значений), полученные в работе [8] для эйлеровых нагрузок, которые практически совпали с результатами настоящей работы, но все же оказались чуть выше, что характерно для энергетических методов.

Заметим, что в работе [8, таблица 9] при записи результатов некоторые значения были переставлены ошибочно. Например, значение 24,0594 записано в другом столбце (для $e_0A = 1,5$). Из-за этого оно оказалось локальным максимумом, что не соответствовало графику убывающей зависимости для критической нагрузки [8, рис. 5], что было исправлено в настоящей работе.

По данным таблицы (первые две строки) построены графики зависимостей критических нагрузок P_{1cr} и P_{2cr} от нелокального параметра нанопластины $\delta = e_0A$ (рис. 2). Кривая 1 соответствует эйлеровой нагрузке P_{1cr} , а кривая 2 — P_{2cr} .

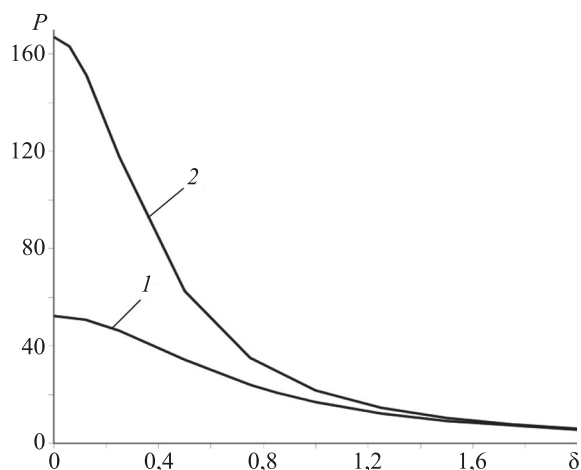


Рис. 2. Зависимости критических нагрузок P_{1cr} (кривая 1) и P_{2cr} (кривая 2) от нелокального параметра $\delta = e_0A$

Fig. 2. Dependence of the first (Eulerian) and second critical loads from a non-local parameter $\delta = e_0A$ (curve 1 and 2, respectively)

Таблица. Критические безразмерные сжимающие нагрузки $P = Nb^2/D$ квадратной нанопластины для симметричных форм равновесия при различных значениях нелокального параметра

Table. Critical dimensionless compressive loads $P = Nb^2/D$ of a square nanoplate for symmetric equilibrium forms at different values of the nonlocal parameter

P_{cr}	e_0A								
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
P_{1cr}	52,3450	46,2875	34,3594	24,0361	16,9193	12,2543	9,1656	7,0619	5,5833
P_{2cr}	167,0292	117,8276	62,5509	35,1038	21,7453	14,6013	10,4180	7,7828	6,0246
P_{3cr}	246,327	152,447	71,1255	37,6511	22,6965	15,0241	10,6316	7,9014	6,0953
P_{4cr}	434,787	208,3342	81,3010	40,3226	23,6407	15,4321	10,8342	8,0128	6,1614
P_{1cr} [8]	52,455	46,3739	—	24,0594	16,9308	—	—	—	5,5846

Примечание. Прочерки в таблице означают, что эти результаты в данной работе отсутствуют.

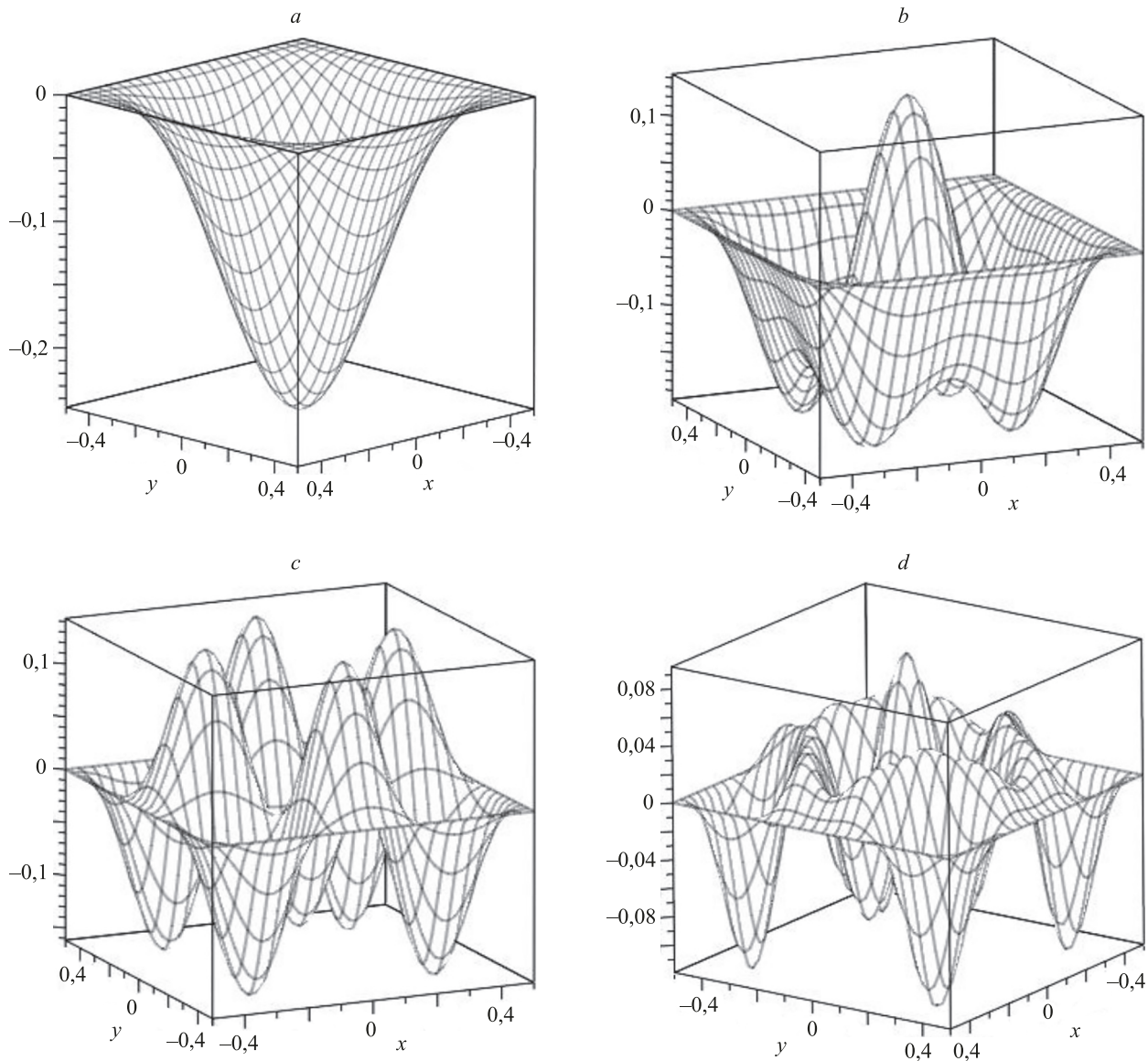


Рис. 3. Симметричные формы равновесия квадратной нанопластины для параметра $e_0A = 1$ при критических нагрузках: $P_{1cr} = 16,9193$ (a); $P_{2cr} = 21,7453$ (b); $P_{3cr} = 22,6965$ (c); $P_{4cr} = 23,6407$ (d)

Fig. 3. Symmetrical forms of equilibrium of a square nanoplate for the parameter $e_0A = 1$ at critical loads: $P_{1cr} = 16.9193$ (a); $P_{2cr} = 21.7453$ (b); $P_{3cr} = 22.6965$ (c); $P_{4cr} = 23.6407$ (d)

Зависимости (рис. 2) и данные таблицы показывают, что с ростом нелокального параметра критические нагрузки убывают и при $e_0A = 2$ практически совпадают ($P_{cr} \approx 6$).

При вычислении критических нагрузок определены и соответствующие нетривиальные функции прогибов нанопластины (10), (11), для которых были получены 3D-изображения форм равновесия. На рис. 3 приведены четыре формы равновесия для нанопараметра $e_0A = 1$. Для остальных значений этого параметра соответствующие формы были подобны и близки (при неизменных начальных значениях коэффициентов A_{k0}^*). Например, наибольшие прогибы при эйлеровой нагрузке составили $-0,2468$; $-0,2470$; $-0,2466$ для $e_0A = 0$; 1; 2. Это говорит о том, что дифференциальное уравнение (1) физического состояния нелокальной теории Эрингена не позволяет обнаружить какой-либо краевой эффект при

деформации нанопластины по сравнению с тонкой пластиной Кирхгоффа. Первая форма (рис. 3, a) соответствует изогнутой поверхности пластины под действием равномерной поперечной нагрузки (одна «выпучина»). Вторая форма (рис. 3, b) имеет одну и четыре вершины по разные стороны, третья (рис. 3, c) — четыре вершины в одну сторону и пять в другую. Четвертая форма (рис. 3, d): одна вершина с «венчиком» с одной стороны и 8 вершин с другой стороны. «Венчик» представляет собой четыре необособленные вершины.

Отметим, что в работе [8] найдены только эйлеровы нагрузки для различных значений нелокального параметра; соответствующие формы равновесия не представлены.

Заключение

Предложенная методика и численные результаты могут быть использованы при проектировании и эксплуатации чувствительных элементов различных датчиков в микроэлектронике и нанотехнике, которые подвержены сжатию в плоскости нанопластины. Последовательное изменение форм закритических состояний датчика с ростом нагрузки приводит через

актуаторы к соответствующему изменению управляющего сигнала в smart-конструкциях.

Предполагается в дальнейшем исследовать антисимметричные и смешанные формы потери устойчивости, определить соответствующие критические нагрузки для данного закрепления пластины, а также рассмотреть и другие варианты граничных условий.

Литература

1. Eringen A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. New York: Springer, 2002. 376 p.
2. Wang L.F., Hu H.Y. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes // *Physical Review B*. 2005. V. 71. N 19. P. 195412. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.195412>
3. Михасев Г.И., Авдейчик Е.В., Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. Исследование свободных продольных колебаний наноразмерной балки с позиций двухфазной нелокальной теории упругости Эрингена // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. Вып. 33. Минск: Белорусский национальный технический университет, 2018. С. 72–80.
4. Benvenuti E., Simone A. One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect // *Mechanics Research Communications*. 2013. V. 48. P. 46–51. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.12.001>
5. Farajpour A., Danesh M., Mohammadi M. Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics // *Physica E: Low-dimensional systems and Nanostructures*. 2011. V. 44. N 3. P. 719–727. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2011.11.022>
6. Bastami M., Behjat B. Ritz solution of buckling and vibration problem of nanoplates embedded in an elastic medium // *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*. 2017. V. 35. N 2. P. 285–302.
7. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2017. V. 28. N 11. P. 1472–1490. <https://doi.org/10.1177/1045389x16672569>
8. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular nanoplates // *Composite Structures*. 2019. V. 210. P. 822–830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094>
9. Chwał M., Muc A. Buckling and free vibrations of nanoplates—comparison of nonlocal strain and stress approaches // *Applied Sciences*. 2019. V. 9. N 7. P. 1409. <https://doi.org/10.3390/app9071409>
10. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2020. V. 8. N 4. P. 505–515. <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3>
11. Pradhan S.C., Kumar A. Buckling analysis of single layered graphene sheet under biaxial compression using nonlocal elasticity theory and DQ method // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2011. V. 8. N 7. P. 1325–1334. <https://doi.org/10.1166/jctn.2011.1818>
12. Pradhan S.C., Murmu T. Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics // *Computational Materials Science*. 2009. V. 47. N 1. P. 268–274. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2009.08.001>
13. Mohammadi M., Goodarzi M., Ghayour M., Alivand S. Small scale effect on the vibration of orthotropic plates embedded in an elastic medium and under biaxial in-plane pre-load via nonlocal elasticity theory // *Journal of Solid Mechanics*. 2012. V. 4. N 2. P. 128–143.
14. Analoei H.R., Azhari M., Heidarpour A. Elastic buckling and vibration analyses of orthotropic nanoplates using nonlocal continuum mechanics and spline finite strip method // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. V. 37. N 10–11. P. 6703–6717. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.051>
15. Karamooz Ravari M.R., Talebi S., Shahidi A.R. Analysis of the buckling of rectangular nanoplates by use of finite-difference method // *Meccanica*. 2014. V. 49. N 6. P. 1443–1455. <https://doi.org/10.1007/s11012-014-9917-x>

References

1. Eringen A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. New York: Springer, 2002, 376 p.
2. Wang L.F., Hu H.Y. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes. *Physical Review B*, 2005, vol. 71, no. 19, pp. 195412. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.195412>
3. Mikhasev G.I., Avdeichik E.V., Kaplunov Iu.D., Prikazchikov D.A. Study of free longitudinal vibrations of a nano-sized beam from the standpoint of Eringen's two-phase nonlocal elasticity theory. *Theoretical and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection*. Vol. 33. Minsk, BNTU, 2018, pp. 72–80. (in Russian)
4. Benvenuti E., Simone A. One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect. *Mechanics Research Communications*, 2013, vol. 48, pp. 46–51. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.12.001>
5. Farajpour A., Danesh M., Mohammadi M. Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics. *Physica E: Low-dimensional systems and Nanostructures*, 2011, vol. 44, no. 3, pp. 719–727. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2011.11.022>
6. Bastami M., Behjat B. Ritz solution of buckling and vibration problem of nanoplates embedded in an elastic medium. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2017, vol. 35, no. 2, pp. 285–302.
7. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, vol. 28, no. 11, pp. 1472–1490. <https://doi.org/10.1177/1045389x16672569>
8. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular nanoplates. *Composite Structures*, 2019, vol. 210, pp. 822–830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094>
9. Chwał M., Muc A. Buckling and free vibrations of nanoplates—comparison of nonlocal strain and stress approaches. *Applied Sciences*, 2019, vol. 9, no. 7, pp. 1409. <https://doi.org/10.3390/app9071409>
10. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 505–515. <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3>
11. Pradhan S.C., Kumar A. Buckling analysis of single layered graphene sheet under biaxial compression using nonlocal elasticity theory and DQ method. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 2011, vol. 8, no. 7, pp. 1325–1334. <https://doi.org/10.1166/jctn.2011.1818>
12. Pradhan S.C., Murmu T. Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics. *Computational Materials Science*, 2009, vol. 47, no. 1, pp. 268–274. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2009.08.001>
13. Mohammadi M., Goodarzi M., Ghayour M., Alivand S. Small scale effect on the vibration of orthotropic plates embedded in an elastic medium and under biaxial in-plane pre-load via nonlocal elasticity theory. *Journal of Solid Mechanics*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 128–143.
14. Analoei H.R., Azhari M., Heidarpour A. Elastic buckling and vibration analyses of orthotropic nanoplates using nonlocal continuum mechanics and spline finite strip method. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 10–11, pp. 6703–6717. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.051>
15. Karamooz Ravari M.R., Talebi S., Shahidi A.R. Analysis of the buckling of rectangular nanoplates by use of finite-difference method.

16. Hosseini M., Jamalpoor A., Fath A. Surface effect on the biaxial buckling and free vibration of FGM nanoplate embedded in visco-Pasternak standard linear solid-type of foundation // *Meccanica*. 2016. V. 52. N 6. P. 1381–1396. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0469-0>
17. Сухотерин М.В., Потехина Е.В., Анненков Л.В. Определение спектра критических нагрузок и форм равновесия сжатых панелей обшивки корпуса судна // *Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*. 2014. № 2(24). С. 44–51.
18. Сухотерин М.В., Распутин Е.И., Пижурина Н.Ф. Смешанные формы свободных колебаний прямоугольной CFCF-пластины // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2023. Т. 23. № 2. С. 413–421. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421>
19. Duan W.H., Wang C.M., Zhang Y.Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics // *Journal of Applied Physics*. 2007. V. 101. N 2. P. 024305. <https://doi.org/10.1063/1.2423140>
16. Hosseini M., Jamalpoor A., Fath A. Surface effect on the biaxial buckling and free vibration of FGM nanoplate embedded in visco-Pasternak standard linear solid-type of foundation. *Meccanica*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 1381–1396. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0469-0>
17. Sukhoterina M.V., Potekhina E.V., Annenkov L.V. Etermination of the spectrum of critical loads and forms balance compressed cladding panels hull. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admiral S.O. Makarova*, 2014, no. 2(24), pp. 44–51. (in Russian)
18. Sukhoterina M.V., Rasputina E.I., Pizhurina N.F. Mixed forms of free oscillations of a rectangular CFCF-plate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 413–421. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421>
19. Duan W.H., Wang C.M., Zhang Y.Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of Applied Physics*, 2007, vol. 101, no. 2, pp. 024305. <https://doi.org/10.1063/1.2423140>

Авторы

Сухотерин Михаил Васильевич — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 16496923700](https://orcid.org/0000-0002-8295-7089), <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>, sukhoterimv@gumrf.ru

Сосновская Анна Анатольевна — старший преподаватель, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, [sc 59171016800](https://orcid.org/0009-0000-6476-6783), <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Authors

Mikhail V. Sukhoterina — D.Sc., Associate Professor, Head of Department, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 16496923700](https://orcid.org/0000-0002-8295-7089), <https://orcid.org/0000-0002-8295-7089>, sukhoterimv@gumrf.ru

Anna A. Sosnovskaya — Senior Lecturer, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, [sc 59171016800](https://orcid.org/0009-0000-6476-6783), <https://orcid.org/0009-0000-6476-6783>, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 23.04.2024
Одобрена после рецензирования 28.05.2024
Принята к печати 19.07.2024

Received 23.04.2024
Approved after reviewing 28.05.2024
Accepted 19.07.2024



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»