

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-150-160

УДК 004.94

Компьютерное моделирование немарковских процессов на основе принципа баланса «комплексных вероятностей»

Ярослав Николаевич Гусеница¹✉, Олег Анатольевич Ширямов²

¹ Военный инновационный технополис «ЭРА», Анапа, 353456, Российская Федерация

² Военно-космическая академия А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация

¹ yaromir226@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-4757-5066>

² shiryamov_oa@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8985-8251>

Аннотация

Предмет исследования. Значительная часть исследований эффективности различных систем посвящена изучению их функционирования в стационарном режиме. Однако с точки зрения их практического применения представляют интерес исследования функционирования таких систем с изменяющейся интенсивностью рабочей нагрузки в переходных, нестационарных режимах работы. В отличие от моделей исследования нестационарных систем, существенно опирающихся на статические значения распределений, в данной работе предложена модель с использованием произвольных распределений вероятностей во времени. **Метод.** Математическая формализация модели основана не на применении классической дифференциальной модели во временной области, а на формальном представлении вероятностей состояний систем в преобразовании Лапласа, т. е. в комплексном виде. Определение значений вероятностей состояний систем основывается на принципе баланса «комплексных вероятностей», что позволяет разрабатывать модели нестационарных систем обслуживания с произвольными распределениями вероятностей времени поступления заявок и их обслуживания, учитывающие случайные или детерминированные временные задержки. Для оперативного расчета систем предлагается использовать разработанное приложение с графическим пользовательским интерфейсом.

Основные результаты. Представлена архитектура данного приложения в виде диаграммы пакетов. Показан алгоритм работы приложения. Выполнено сравнение работы приложения с программами для решения задач технических вычислений MATLAB и MathCad при моделировании процесса функционирования эталона единицы величины и системы управления роботом. Приведены преимущества использования разработанного приложения. **Практическая значимость.** Представленные результаты могут быть применены специалистами, занимающимися исследованиями эффективности различных систем.

Ключевые слова

немарковский процесс, принцип баланса, компьютерное моделирование, изображение Лапласа, Python, граф состояния

Благодарности

Авторы работы выражают благодарность своему научному наставнику — действительному члену Международной академии информатизации, заслуженному деятелю науки Российской Федерации, доктору технических наук, профессору Владимиру Александровичу Смагину.

Ссылка для цитирования: Гусеница Я.Н., Ширямов О.А. Компьютерное моделирование немарковских процессов на основе принципа баланса «комплексных вероятностей» // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 1. С. 150–160. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-150-160

Computer modeling of non-Markovian processes based on the principle of balance of “complex probabilities”

Yaroslav N. Gusenitsa¹✉, Oleg A. Shiryamov²

¹ Military Innovative Technopolis “ERA”, Anapa, 353456, Russian Federation

² Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

¹ yaromir226@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-4757-5066>

² shiryamov_oa@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8985-8251>

Abstract

A significant part of the research on the effectiveness of various systems is devoted to the study of their functioning in a stationary mode. However, from the point of view of their practical application, it is of interest to study the functioning of such systems with varying workload intensity in transient, non-stationary modes of operation. And unlike the models for studying non-stationary systems, which are essentially based on the static values of distributions, this paper proposes a model using arbitrary probability distributions over time. The mathematical formalization of the model is based not on the application of the classical differential model in the time domain, but on the formal representation of the probabilities of the system states in the Laplace transform, i.e., in a complex way. Determining the values of the probabilities of the systems states is based on the principle of balance of “complex probabilities” which allows developing models of non-stationary queuing systems with arbitrary probability distributions of the arrival time of requests and their service, taking into account random or deterministic time delays. For the operational calculation of systems, it is proposed to use the developed application with a graphical user interface. The architecture of this application is presented in the form of a package diagram. The algorithm of the application is shown. Comparison of the application operation with programs MATLAB and MathCad for solving the problems of technical calculations was made when modeling the process of functioning of the standard unit of quantity and the robot control system. The advantages of using the developed application are given. The presented results can be applied by specialists involved in research on the effectiveness of various systems.

Keywords

non-Markovian process, balance principle, computer simulation, Laplace image, Python, state graph

Acknowledgements

The authors of the work express their gratitude to their scientific mentor — member of the International Academy of Informatization, Honored Scientist of the Russian Federation, Doctor of Technical Sciences, Professor Vladimir Alexandrovich Smagin.

For citation: Gusenitsa Ya.N., Shiryamov O.A. Computer modeling of non-Markovian processes based on the principle of balance of “complex probabilities”. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 150–160 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-150-160

Введение

В настоящее время при разработке сложных систем моделирование, как правило, остается единственным способом оценки показателей качества до момента изготовления. Кроме того, применение моделирования на начальных стадиях жизненного цикла систем позволяет значительно сократить сроки проведения испытаний и уменьшить финансовые и материальные затраты.

Важным аспектом в данной проблематике является создание моделей, которые позволяют описывать с высокой степенью адекватности различные аспекты поведения систем на всех стадиях жизненного цикла, учитывать изменяющуюся интенсивность рабочей нагрузки в переходных и нестационарных режимах работы.

Модели функционирования систем с изменяющейся интенсивностью рабочей нагрузки и методы их расчета рассмотрены в [1, 2]. Однако в практическом применении они сложны и громоздки.

Подобные математические структуры получили название моделей нестационарных систем массового обслуживания. В [3] изучены нестационарные одноканальные и многоканальные модели с различными видами распределений между поступающими заявками и длительностями их обслуживания. В [4] предложено расширение свойств нестационарной модели за

счет учета в ней времени задержки на обслуживание, построен соответствующий процессу граф, записана и решена система дифференциальных уравнений. При этом предложенные модели являются марковскими, так как в них используются экспоненциальные законы распределения и постоянное значение времени задержки.

В работах [5, 6] предложен принцип баланса «комплексных вероятностей» для моделирования нестационарных систем массового обслуживания, представленных в виде ациклического графа переходов состояний. В [7, 8] данный принцип применен для моделирования нестационарных систем массового обслуживания, рассмотренных в виде замкнутой системы переходов состояний. В [9] проведена систематизация и обобщение принципа баланса «комплексных вероятностей» для разработки моделей стохастических процессов с произвольными распределениями вероятностей времени поступления заявок и их обслуживания, учитывающих случайные или детерминированные временные задержки.

Учитывая, что в рассмотренных работах применение принципа баланса «комплексных вероятностей» в инженерной практике не до конца раскрыт, в рамках настоящей работы представлены предложения по программной реализации компьютерного моделирования немарковских процессов.

Основные положения принципа баланса «комплексных вероятностей»

Термин «комплексные вероятности» впервые введен Дэвидом Коксом [10]. В работе [11] отмечено, что «...применив метод «комплексных вероятностей» Кокса, мы можем охватить случай, когда плотность длительности обслуживания при $x > 0$ задается любой функцией вида»:

$$p(x) = \sum_i C_i x^{r_i} e^{-\lambda_i x},$$

где C_i — i -я комплексно-сопряженная переменная; r_i — количество появлений λ_i в ряду $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$; λ_i — интенсивность обслуживания в i -м состоянии.

«...лишь бы она была неотрицательной и имела интеграл, равный 1». Кроме того, «...любые законы распределения длительности обслуживания допускают аппроксимацию суммой экспонент с полиномиальными множителями».

Данная идея была применена в [12] при разложении распределений вероятностей на сумму экспоненциальных плотностей с комплексными сопряженными коэффициентами и параметрами с целью решения исследования немарковских процессов. В работе [13] изучен вопрос о вероятностном анализе комплексной переменной с введением комплексной дельта-функции Дирака. В работе [14] приведено строгое обоснование комплексных функций Хевисайда и Дирака, а также показан численный пример приложения дельта-функции к исследованию альтернирующего случайного процесса с накоплением и потерей информации.

Результаты перечисленных исследований составляют основу принципа баланса «комплексных вероятностей».

В общем случае под балансом вероятностей понимается равенство сумм произведений значений интенсивностей переходов на вероятности состояний — отправители заявок (начальные вершины дуг графа состояний) и сумм произведений значений интенсивностей переходов на вероятности состояний — получатели заявок (конечные вершины дуг графа состояний). Таким образом, состояние процесса определяется как равновесное, когда среднестатистические характеристики входящих и выходящих случайных потоков взаимно уравновешиваются. Полученные уравнения для состояний процесса необходимо решить, чтобы найти стационарные значения вероятности состояний. Во временной области математическая формализация процесса основывается на действиях умножения независимых интенсивностей, вероятностей и сложении полученных произведений несовместных событий состояний процесса.

В случае баланса «комплексных вероятностей» стохастический процесс описывается не во временной, а в комплексной области. Для этого применяется преобразование Лапласа, позволяющее представить систему дифференциальных или интегральных уравнений стохастического процесса в виде системы алгебраических уравнений [9].

При использовании баланса «комплексных вероятностей» временные характеристики (вероятности

состояний) заменяются их изображениями в преобразовании Лапласа. Попаданию системы в некоторое состояние предшествует суммирование случайных временных интервалов траектории случайного процесса. В преобразовании Лапласа суммирование траекторий соответствует произведению изображений плотностей вероятностей. В результате для составления уравнений баланса состояний необходимо использовать произведение изображений с их последующим суммированием [9].

Пусть требуется найти вероятности состояний двухфазного немарковского процесса. Для исследования баланса «комплексных вероятностей» изобразим граф переходов (рис. 1).

Данный граф содержит переходы (стрелки, направленные вправо), связанные не с интенсивностями поступления в систему прибывающих заявок, а с изображениями по Лапласу плотностей вероятностей времени между заявками $a^*(s)$, где «*» — символ преобразования; s — комплексная переменная Лапласа.

Переходы (стрелки, направленные влево), связаны не с интенсивностями обслуживания прибывших заявок, а с изображениями по Лапласу плотностей вероятностей времен их обслуживания — $b^*(s)$. Кроме того, при ветвлении случайного процесса используются условные вероятности переходов α и β . Благодаря такому представлению происходит переход от марковских случайных процессов к немарковским. Отметим, что для перехода требуется не модель дифференциальных уравнений типа «гибели и размножения», а другая математическая форма — модель «комплексного представления вероятностей».

При данных условиях составим систему уравнений баланса:

$$\begin{cases} a^*(s)P_0^*(s) = \beta b^*(s)P_1^*(s); \\ (\alpha a^*(s) + \beta b^*(s))P_1^*(s) = a^*(s)P_0^*(s) + b^*(s)P_2^*(s); \\ b^*(s)P_2^*(s) = \alpha a^*(s)P_1^*(s). \end{cases} \quad (1)$$

Примем во внимание условие нормирования изображений вероятностей

$$\sum_{i=0}^2 P_i^*(s) = \frac{1}{s},$$

где $P_i^*(s)$ — комплексная вероятность нахождения эталона единицы величины в i -м состоянии, и решив систему уравнений (1), получим:

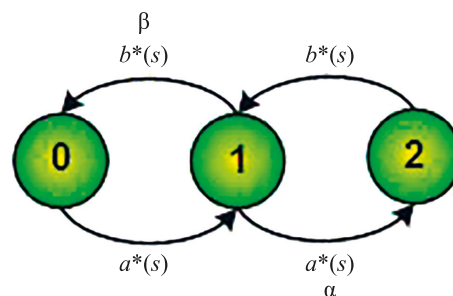


Рис. 1. Граф переходов нестационарной системы обслуживания

Fig. 1. Graph of transitions of a non-stationary queueing system

$$\begin{aligned}
P_0^*(s) &= \frac{\beta(b^*(s))^2}{s(\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2)}, \\
P_1^*(s) &= \frac{a^*(s)b^*(s)}{s(\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2)}, \\
P_2^*(s) &= \frac{\alpha(a^*(s))^2}{s(\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2)}.
\end{aligned} \quad (2)$$

Пусть интервалы времени поступления заявок и их обслуживания подчиняются нормальному закону распределения.

Примем следующие исходные данные:

- распределение времени t между поступающими заявками нормальное с плотностью вероятности

$$a(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}},$$

математическим ожиданием $m = 20$ ч, среднеквадратичным отклонением $\sigma = 5$ ч;

- распределение времени t обслуживания требований нормальное с плотностью вероятности

$$b(t) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-n)^2}{2\theta^2}},$$

математическим ожиданием $n = 15$ ч, среднеквадратичным отклонением $\theta = 3$ ч.

Соответствующие функции распределения равны:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_0^t a(z) dz; \\
B(t) &= \int_0^t b(z) dz.
\end{aligned}$$

Определим условные вероятности переходов при ветвлении случайного процесса:

$$\alpha = \int_0^\infty (1 - B(z)) dA(z) = 0,196;$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - A(z)) dB(z) = 0,804.$$

Найдем изображения Лапласа плотностей вероятностей, используя гипердельтную аппроксимацию нор-

мальной плотности по четырем начальным моментам, приведенную в [13], которую представим в виде:

$$f_\delta(t) = \frac{1}{2}(\delta(t - m - \sigma) + \delta(t - m + \sigma)), \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака; m и σ — параметры аппроксимируемого распределения.

Применив формулу (3), получим аппроксимационные формулы плотностей вероятностей:

$$a(t) \approx \frac{1}{2}(\delta(t - 15) + \delta(t - 25));$$

$$b(t) \approx \frac{1}{2}(\delta(t - 12) + \delta(t - 18)),$$

которые в изображениях Лапласа примут вид:

$$\begin{aligned}
a^*(s) &= \frac{1}{2} \left(e^{-15s} + (e^{-15s})^{\frac{5}{3}} \right); \\
b^*(s) &= \frac{1}{2} \left(e^{-12s} + (e^{-12s})^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned} \quad (4)$$

Подставим формулы (4) в уравнения (2), получим их в развернутом виде для приведенных числовых данных примера.

Чтобы получить выражения для вероятностей состояний во временной области, необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Однако достичь ожидаемых результатов достаточно затруднительно из-за сложности прямых изображений Лапласа искомых вероятностей и вычислительных трудностей работы с нормальными распределениями. В связи с этим переход от изображений $P_0^*(s)$, $P_1^*(s)$, $P_2^*(s)$ к оригиналам $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ произведем, применяя приближенный способ обращения преобразования Лапласа с использованием формулы Алфрея. Формула Алфрея является результатом формулы Уайдера на основе свойства фильтрации преобразования Лапласа с помощью дельта-функции. Она имеет следующий вид [15]:

$$f(t) \approx sf^*(s), \text{ при } s = \frac{1}{t}. \quad (5)$$

В результате применения формулы (5) получим выражения для вероятностей состояний процесса:

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= \frac{0,804 \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)}, \\
P_1(t) &= \frac{\left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)},
\end{aligned}$$

$$P_2(t) = \frac{0,196 \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)}{\left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left(\frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left(\frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left(e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)}.$$

Численные результаты представлены в виде графиков зависимостей вероятностей на рис. 2.

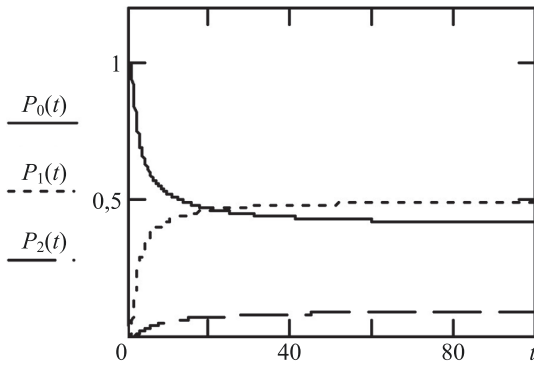


Рис. 2. Графики вероятностей состояний в течение времени
Fig. 2. Graphs of state probability functions over time

Немарковские модели процесса функционирования эталона единицы величины и системы управления роботом

В работах [16, 17] исследован процесс функционирования нижестоящего по точности эталона единицы величины средства измерений в условиях увеличения нагрузки.

В течение времени t с определенной интенсивностью поступает поток нижестоящих по точности N

эталонов на метрологическое обслуживание. Эталонам передается значение единицы величины с определенной интенсивностью. Таким образом, процесс функционирования эталона единицы величины может быть представлен с помощью графа переходов в изображениях Лапласа (рис. 3).

На рис. 3 приняты следующие обозначения: $a_i^*(s)$ и $b^*(s)$ — плотности вероятности поступления i -го эталона на метрологическое обслуживание и передачи единицы величины, представленных в изображении Лапласа; α_i и β_i — условные вероятности перехода, которые определяют выбор дальнейшего движения случайного процесса из состояний графа.

Для графа переходов (рис. 3) составим систему уравнений баланса:

$$\begin{cases} a_0^*(s)P_0^*(s) = \beta_1 b^*(s)P_1^*(s) \\ (\alpha_1 a_1^*(s) + \beta_1 b^*(s))P_1^*(s) = a_0^*(s)P_0^*(s) + \beta_2 b^*(s)P_2^*(s) \\ \dots \\ b^*(s)P_N^*(s) = \alpha_{N-1} a_{N-1}^*(s)P_{N-1}^*(s) \end{cases} \quad (6)$$

Принимая во внимание условие нормирования изображений вероятностей состояний и, решив систему уравнений (6), получим общую формулу для вычисления комплексной вероятности состояния, в которой всем поступившим эталонам будет передана единица величины:

$$P_0^*(s) = \frac{(\prod_{i=1}^{N-1} \beta_i) (b^*(s))^N}{s((\prod_{i=1}^{N-1} \beta_i) (b^*(s))^N + \prod_{i=1}^{N-1} \alpha_i \prod_{i=0}^{N-1} a_i^*(s) + \sum_{i=0}^{N-2} \alpha_i a_i^*(s) \beta_{i+2} b^*(s))}.$$

Учитывая, что вероятности переходов между состояниями подчиняются нормальному закону распределе-

ния, запишем аналитическое выражение для вероятности передачи единицы величины эталоном:

$$P_0(t) = \frac{(\prod_{i=1}^{N-1} \beta_i) \left(\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(m^b - \sigma^b)}{t}} + \left(e^{-\frac{-(m^b + \sigma^b)}{t}} \right)^{\frac{m^b + \sigma^b}{m^b - \sigma^b}} \right) \right)^N}{(\prod_{i=1}^{N-1} \beta_i) \left(\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(m^b - \sigma^b)}{t}} + \left(e^{-\frac{-(m^b + \sigma^b)}{t}} \right)^{\frac{m^b + \sigma^b}{m^b - \sigma^b}} \right) \right)^N + \prod_{i=1}^{N-1} \alpha_i \prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(m_i^a - \sigma_i^a)}{t}} + \left(e^{-\frac{-(m_i^a + \sigma_i^a)}{t}} \right)^{\frac{m_i^a + \sigma_i^a}{m_i^a - \sigma_i^a}} \right) \right) + \sum_{i=0}^{N-2} \alpha_i \left(\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(m_i^a - \sigma_i^a)}{t}} + \left(e^{-\frac{-(m_i^a + \sigma_i^a)}{t}} \right)^{\frac{m_i^a + \sigma_i^a}{m_i^a - \sigma_i^a}} \right) \right) \beta_{i+2} \left(\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(m^b - \sigma^b)}{t}} + \left(e^{-\frac{-(m^b + \sigma^b)}{t}} \right)^{\frac{m^b + \sigma^b}{m^b - \sigma^b}} \right) \right)^N}, \quad (7)$$

где α_i и β_i — условные вероятности переходов, которые определяют выбор дальнейшего движения случайного процесса из состояний графа; m^b и σ^b — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение вероятности перехода в предыдущее состояние; m_i^a

и σ_i^a — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение вероятности перехода в $i + 1$ состояние.

В [18, 19] исследован процесс функционирования системы управления роботом в условиях динамиче-

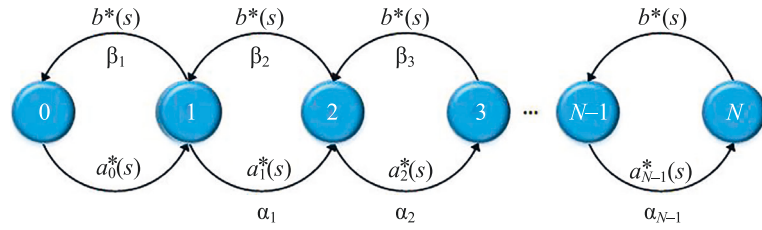


Рис. 3. Граф переходов процесса функционирования эталона единицы величины

Fig. 3. Graph of transitions for the standard unit of magnitude functioning process

ски изменяющихся значений параметров окружающей среды.

Процесс функционирования системы управления роботом рассмотрим в следующих состояниях систем управления: A_{00} — не идентифицирует изменения значений параметров окружающей среды и не формирует командную информацию; A_{10} — идентифицирует изменения значений параметров окружающей среды, но не формирует командную информацию; A_{01} — не идентифицирует изменения значений параметров окружающей среды, но формирует командную информацию; A_{11} — идентифицирует изменения значений параметров окружающей среды и формирует командную информацию.

Для объекта исследования получим граф переходов в изображениях Лапласа (рис. 4).

В соответствии с рис. 4 составим систему уравнений баланса:

$$\begin{cases} a_0^*(s)P_{00}^*(s) = \beta_2 b_2^*(s)P_{01}^*(s) \\ a_1^*(s)P_{10}^*(s) = a_0^*(s)P_{00}^*(s) + \alpha_3 a_3^*(s)P_{11}^*(s) \\ (\alpha_2 a_2^*(s) + \beta_2 b_2^*(s))P_{01}^*(s) = a_1^*(s)P_{10}^*(s) + \beta_3 b_3^*(s)P_{11}^*(s) \\ (\alpha_3 a_3^*(s) + \beta_3 b_3^*(s))P_{11}^*(s) = \alpha_2 a_2^*(s)P_{01}^*(s) \end{cases}$$

Решив систему уравнений (7), получим общую формулу для вычисления комплексной вероятности

$$P_{00}^*(s) = \frac{a_1^*(s)\beta_2 b_2^*(s)(\alpha_3 a_3^*(s) + \beta_3 b_3^*(s))}{s((\alpha_3 a_3^*(s) + \beta_3 b_3^*(s))((\beta_2 b_2^*(s))(a_1^*(s) + a_0^*(s)) + a_0^*(s)a_1(s)) + (a_0^*(s)\alpha_2 a_2^*(s))(\alpha_3 a_3^*(s) + a_1^*(s)))}$$

Учитывая, что вероятности переходов между состояниями подчиняются экспоненциальному закону распределения, составим аналитическое выражение для вероятности того, что на произвольные изменения

$$P_{00}(s) = \frac{a_1(t)\beta_2 b_2(t)(\alpha_3 a_3(t) + \beta_3 b_3(t))}{(\alpha_3 a_3(t) + \beta_3 b_3(t))((\beta_2 b_2(t))(a_1(t) + a_0(t)) + a_0(t)a_1(t)) + (a_0(t)\alpha_2 a_2(t))(\alpha_3 a_3(t) + a_1(t))}$$

где α_i и β_i — условные вероятности переходов, которые определяют выбор дальнейшего движения случайного процесса из состояний графа; $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ — вероятности перехода из i -го в i -е состояние.

Программное решение

На основе рассмотренного в разделе «Основные положения принципа баланса «комплексных вероятностей» разработано приложение с графическим пользовательским интерфейсом «Система компьютерного моделирования немарковских процессов». Приложение

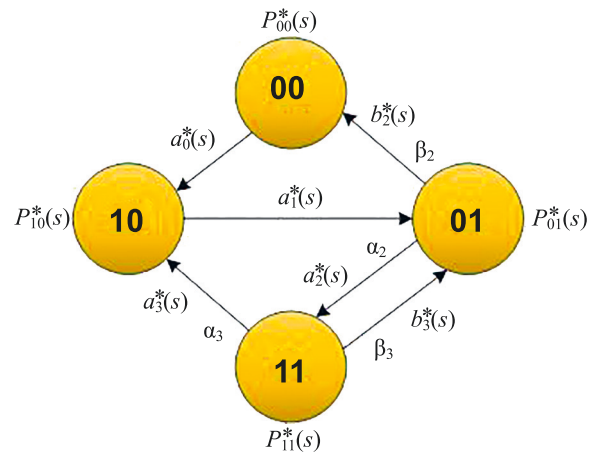


Рис. 4. Граф переходов процесса функционирования системы управления роботом

Fig. 4. Graph of transitions of the robot control system functioning process

состояния, в котором на произвольные изменения значений параметров окружающей среды сформирована командная информация:

значений параметров окружающей среды сформирована командная информация для остальных подсистем робота:

написано на языке Python (версии 3.10) с использованием библиотек SciPy (1.9.1), Kivy (2.0.0), SymPy (1.10.1), Matplotlib (3.6.0), Mpmath (1.2.1) и Pillow (8.4.0) [20–25]. Архитектура приложения в виде диаграммы пакетов представлена на рис. 5.

Программа (ср) состоит из двух блоков: пользовательского интерфейса (frontend), реализующего взаимодействие с оператором; расчетного блока (backend), осуществляющего вычисления.

Модуль main.py является входной точкой приложения и инициализирует его главное окно.

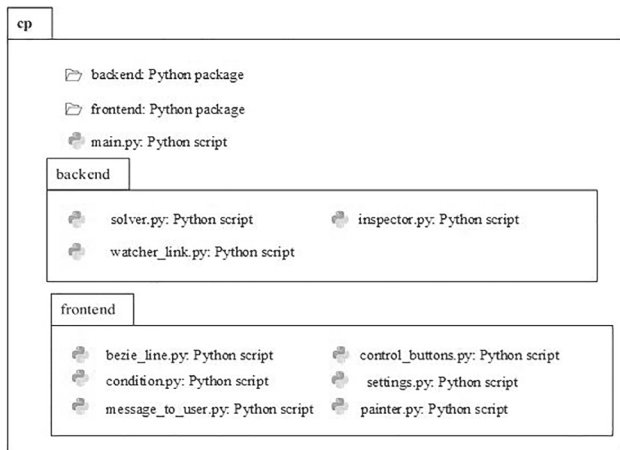


Рис. 5. Диаграмма пакетов приложения «Система компьютерного моделирования немарковских процессов»
Fig. 5. Package diagram of the application “Computer Modeling System for Non-Markovian Processes”



Рис. 6. Алгоритм работы приложения
Fig. 6. Application algorithm

Расчетный блок состоит из модулей solver.py, inspector.py и watcher_link.py, отвечающих за: определение условных вероятностей переходов; гипердельтную аппроксимацию произвольных плотностей распределения; формирование и решение системы уравнений баланса «комплексных вероятностей».

Пользовательский интерфейс включает модули bezier_line.py, condition.py, control_buttons.py, message_to_user.py, painter.py и settings.py, реализующие различные графические элементы приложения, логику их взаимодействия с оператором, обработку вводимых данных, а также обработку исключений.

Алгоритм работы приложения приведен на рис. 6.

Полученное приложение позволяет [26]: создавать в интерактивном режиме состояния и систему переходов между ними для объекта исследований; выбирать произвольные законы распределения и настраивать их числовые характеристики для описания системы переходов между состояниями; сохранять граф системы переходов в формате «*.png»; вычислять и строить графики вероятностей нахождения объекта исследований во всех состояниях.

Компьютерное моделирование процессов функционирования эталона единицы величины и системы управления роботом

Выполним расчетный эксперимент на моделях процессов функционирования эталона единицы величины и системы управления роботом с помощью приложения «Система компьютерного моделирования немарковских процессов», системы MATLAB и среды MathCad с целью получения сравнительной характеристики программных решений для компьютерного моделирования немарковских процессов.

Для модели функционирования эталона единицы величины численные расчеты проведем в MATLAB (версии R2018a). При расчете рассмотрим только первые три состояния. Вероятности между состояниями подчиняются нормальному закону распределения и имеют следующие значения для числовых характеристик: $m_0^1 = 5$ ч; $\sigma_0^1 = 0,2$ ч; $m_1^2 = 3$ ч; $\sigma_0^2 = 0,1$ ч; $m_1^1 = 6$ ч; $\sigma_1 = 0,4$ ч; $m_2 = 2$ ч; $\sigma_2 = 0,2$ ч.

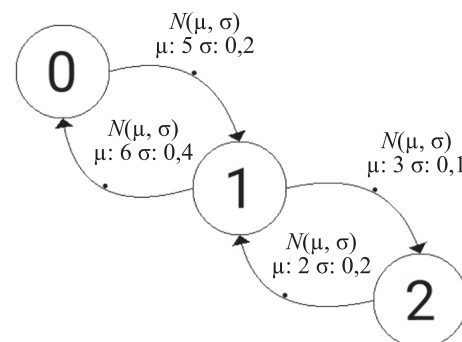


Рис. 7. Граф переходов процесса функционирования эталона единицы величины

Fig. 7. Graph of transitions of the standard unit of magnitude functioning process

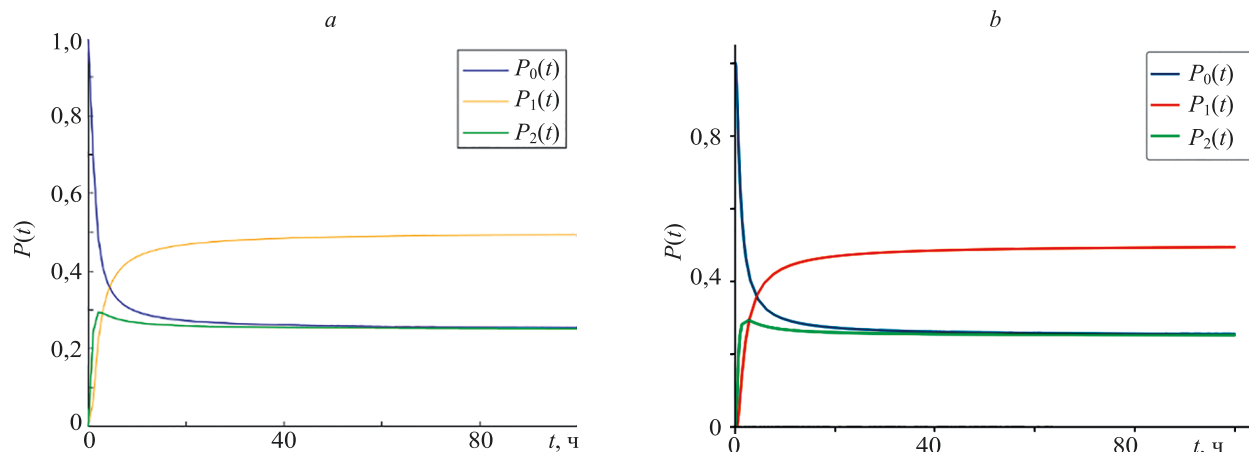


Рис. 8. Графики вероятностей нахождения эталона единицы величины в состояниях, полученные в MATLAB (a) и в разработанном приложении (b)

Fig. 8. Graphs of probabilities of finding a unit of magnitude reference in states obtained in MATLAB (a) and in the developed application (b)

Построим граф переходов в разработанном приложении «Система компьютерного моделирования немарковских процессов» (рис. 7).

На рис. 7 $N(\mu, \sigma)$ обозначает нормальный закон распределения с математическим ожиданием μ и среднеквадратичным отклонением σ .

По результатам расчета получим численные значения вероятности нахождения эталона в начальном состоянии, представленные для удобства в виде графика (рис. 8, a).

Выполним расчет значений вероятностей нахождения эталона во всех состояниях. Результаты представлены на рис. 8, b.

Как видно из рис. 8, результаты, полученные в приложении «Система компьютерного моделирования немарковских процессов», обладают высокой схожимостью с результатами, вычисленными в системе моделирования MATLAB. Однако у разработанного

приложения есть ряд преимуществ (рис. 9): временная сложность расчета значений вероятностей ниже, так как приложение работает с оперативной памятью на более низком уровне; условное время изменения параметров системы значительно ниже за счет пользовательского интерфейса, реализующего взаимодействие с оператором.

Для модели процесса функционирования системы управления роботом для различных состояний численные расчеты проведены в среде MathCad (версии 14.0). При расчете использованы следующие исходные данные для плотностей вероятностей переходов:

- из состояния 0 в состояние 1 подчиняется равномерному закону распределения с числовой характеристикой $m_0^1 = 2$ мс;
- из состояния 1 в состояние 2 подчиняется гамма-распределению с числовыми характеристиками $k_1^2 = 5$ мс и $\lambda_1^2 = 2$ мс;

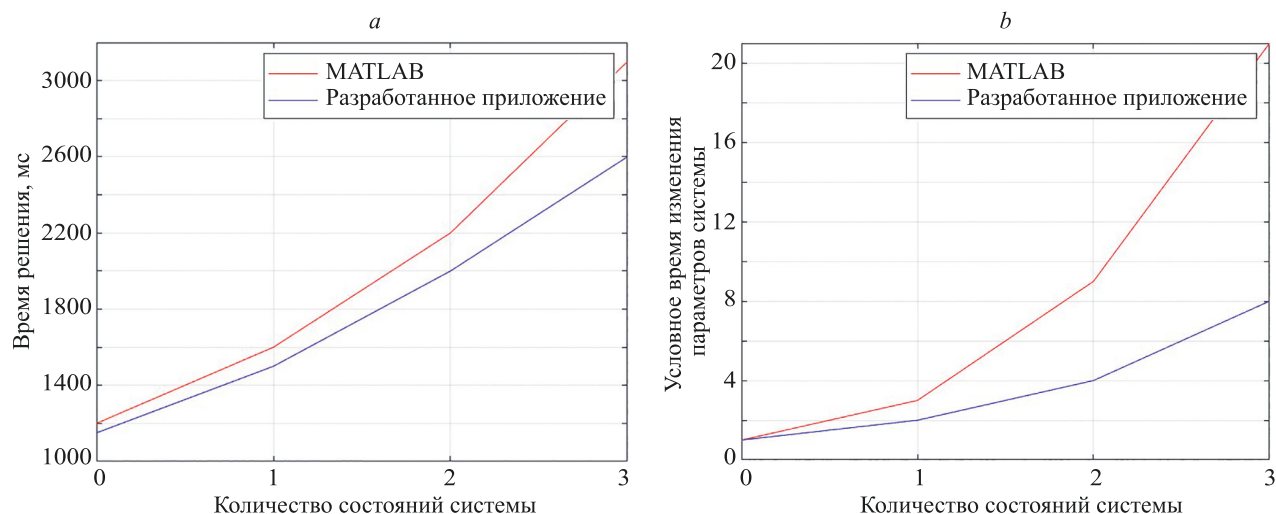


Рис. 9. Сравнительные характеристики разработанного приложения с MATLAB: временная сложность (a) и оперативность изменения начальных условий (b)

Fig. 9. Comparative characteristics of the developed application with MATLAB: time complexity (a) and speed of changing initial conditions (b)

- из состояния 2 в состояние 0 подчиняется экспоненциальному закону распределения с числовой характеристикой $\lambda_2^0 = 3$ мс;
- из состояния 2 в состояние 3 подчиняется нормальному закону распределения с числовыми характеристиками $m_2^3 = 5$ мс и $\sigma_2^3 = 2$ мс;
- из состояния 3 в состояние 1 подчиняется экспоненциальному закону распределения с числовой характеристикой $\lambda_3^1 = 6$ мс;
- из состояния 3 в состояние 2 подчиняется закону Рэлея с числовой характеристикой $\sigma_3^2 = 4$ мс.

Построим в приложении граф переходов в приложении «Система компьютерного моделирования немарковских процессов» (рис. 10).

На рис. 10: $U(a)$ — равномерный закон распределения с числовой характеристикой a ; $\text{Exp}(\lambda)$ — экспоненциальный закон распределения с числовой характеристикой λ ; $\Gamma(k, \theta)$ — экспоненциальный закон

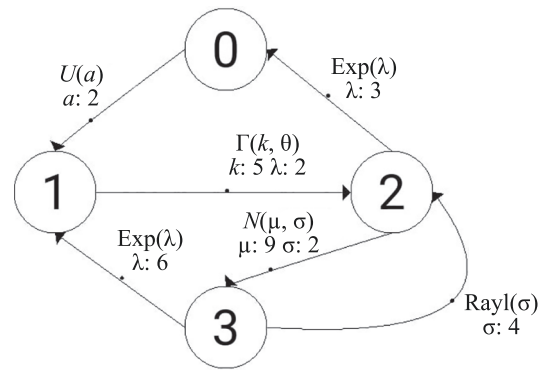


Рис. 10. Граф переходов процесса функционирования системы управления роботом

Fig. 10. Graph of transitions of the robot control system functioning process

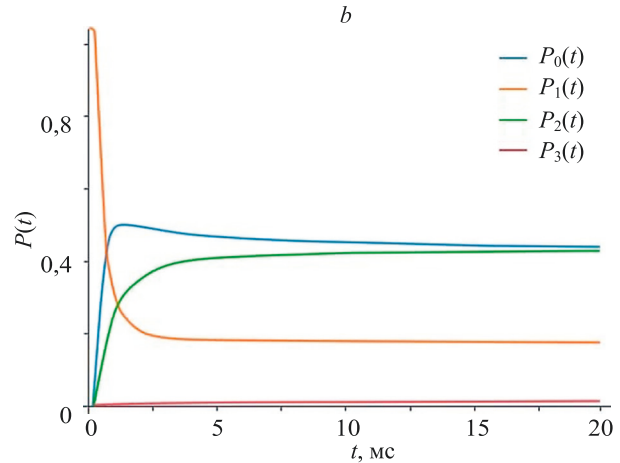
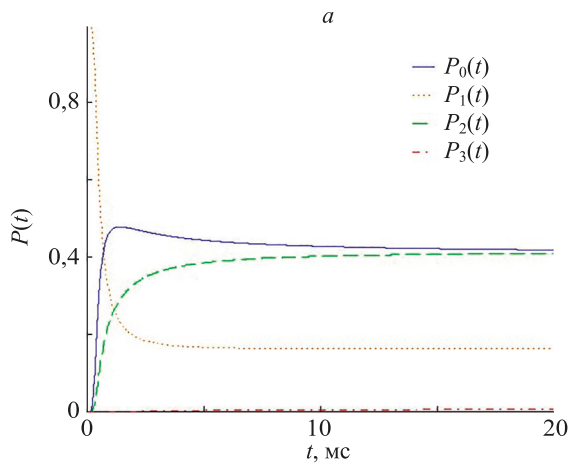


Рис. 11. Графики вероятностей нахождения системы управления роботом в состояниях, полученные в MathCad (a) и в разработанном приложении (b)

Fig. 11. Graphs of probabilities of finding the robot control system in states obtained in MathCad (a) and in the developed application (b)

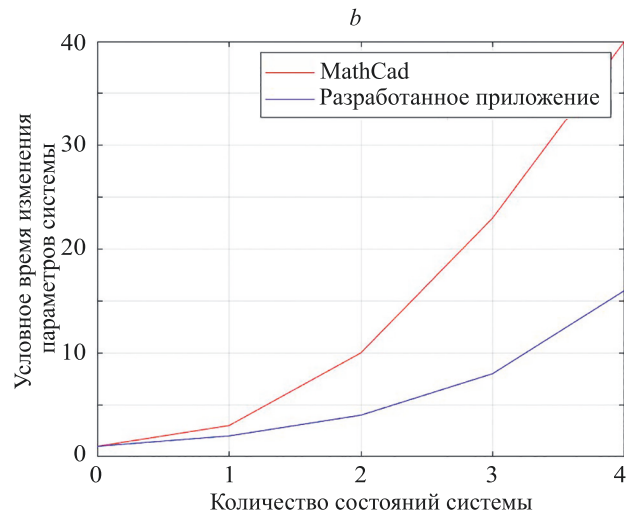
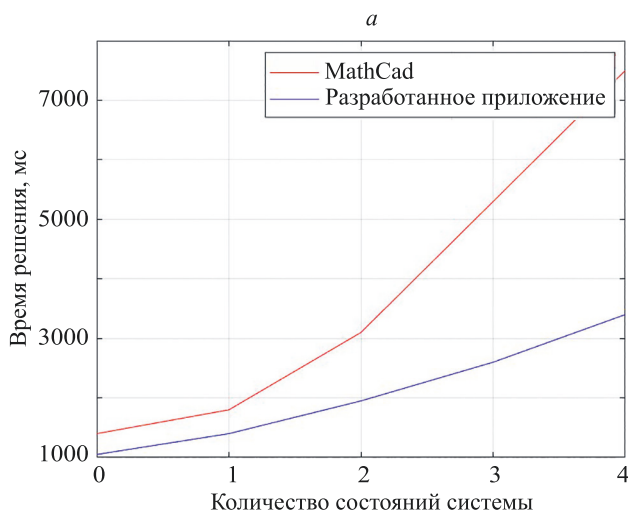


Рис. 12. Сравнительные характеристики разработанного приложения с MathCad: временная сложность (a) и оперативность изменения начальных условий (b)

Fig. 12. Comparative characteristics of the developed application with MathCad: time complexity (a) and speed of changing initial conditions (b)

распределения с числовыми характеристиками k и θ ; Rayl(σ) закон Рэлея с числовой характеристикой σ .

По результатам расчета получены численные значения вероятности нахождения процесса функционирования системы управления роботом для различных состояний (рис. 11, а).

Вычислим значения вероятностей нахождения системы управления роботом во всех состояниях. Результаты представлены на рис. 11, б.

Анализ рис. 11 показал, что результаты, полученные в разработанном приложении, обладают высокой сходимостью с результатами, вычисленными в среде MathCad. При этом, как и в сравнении с системой MATLAB, временная сложность расчета значений вероятностей и условное время изменения параметров системы значительно ниже у приложения (рис. 12).

Заключение

В работе выполнен анализ применения принципа баланса «комплексных вероятностей», основанного на описании стохастического процесса не во временной, а в комплексной области. Результаты позволили разра-

ботать модели нестационарных систем обслуживания с произвольными распределениями вероятностей времени поступления заявок и их обслуживания, учитывающие случайные или детерминированные временные задержки.

Программная реализация принципа баланса позволила получить результаты, которые имеют высокую сходимость с вычислениями, осуществленными в системе MATLAB и среде MathCad. Кроме того, разработанное приложение имеет более высокую производительность за счет своей архитектуры и наличия пользовательского интерфейса, реализующего взаимодействие с оператором. При этом компьютерное моделирование в приложении «Система компьютерного моделирования немарковских процессов» не требует дополнительных знаний языков программирования, навыков работы в специальных системах автоматизированного проектирования, а также необходимости вывода аналитических выражений для получения искомых результатов. Разработанное приложение может быть применено специалистами, занимающимися исследованиями эффективности различных систем.

Литература

1. Сигалов Г.Г., Николаева Г.В., Люперсольский А.М. Влияние параметров надежности на эффективность локальной вычислительной сети с радиальной структурой // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 4. С. 35–42.
2. Горов Г.В., Коган Я.А., Парадизов Н.В. Диффузионно-скачкообразная аппроксимация в однолинейных системах с прерываниями обслуживания и переменным режимом поступления заявок // Автоматика и телемеханика. 1985. № 6. С. 44–51.
3. Бубнов В.П., Сафонов В.И. Разработка динамических моделей нестационарных систем обслуживания. СПб.: Лань, 1999. 64 с.
4. Eremin A.S. A queueing system with determined delay in starting the service // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 4(4). С. 23–26.
5. Смагин В.А., Гусеница Я.Н. К вопросу моделирования одноканальных нестационарных систем с произвольными распределениями моментов времени поступления заявок и длительностей их обслуживания // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2015. № 649. С. 56–63.
6. Смагин В.А., Гусеница Я.Н. О моделировании одноканальных нестационарных систем с произвольными распределениями моментов времени поступления заявок и их обслуживания // Техника средств связи. 2018. № 2(142). С. 199–206.
7. Гусеница Я.Н., Новиков А.Н. Принцип баланса «комплексных вероятностей» при моделировании нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний // Информатика и космос. 2016. № 3. С. 71–74.
8. Смагин В.А., Гусеница Я.Н. Моделирование одноканальных нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний // Известия вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 10. С. 801–806. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-10-801-806>
9. Гусеница Я.Н. Принцип баланса «комплексных вероятностей» и его применение для моделирования немарковских процессов: монография. Анапа: Федеральное государственное автономное учреждение «Военный инновационный технополис «ЭРА», 2022. 47 с.
10. Cox D.R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. N 2. P. 313–319. <https://doi.org/10.1017/S0305004100030231>
11. Riordan J. Stochastic Service Systems. New York: Wiley and Sons Inc., 1962. 139 p.
12. Смагин В.А. Вероятностный анализ комплексной переменной // Автоматика и вычислительная техника. 1999. № 5. С. 3–13.

References

1. Sigalov G.G., Nikolaeva G.V., Liupersolskii A.M. Influence of reliability parameters on the efficiency of a local area computer network with a radial structure. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika*, 1985, no. 4, pp. 35–42. (in Russian)
2. Gorov G.V., Kogan A.Ya., Paradizov N.V. Diffusion jumplike approximation in single-channel systems with service interruptions and variable customer arrival rate. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1985, no. 6, pp. 44–51. (in Russian)
3. Bubnov V.P., Safonov V.I. *Development of Behavior Models of Non-Stationary Queueing Systems*. St. Petersburg, Lan' Publ., 1999, 64 p. (in Russian)
4. Eremin A.S. A queueing system with determined delay in starting the service. *Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 4(4), pp. 23–26. (in Russian)
5. Smagin V.A., Gusenitsa Y.N. About modeling of single-channel queueing system with any distribution of time between arriving requirements and any distribution of time between retardation of requirements. *Proceedings of the Mozhaitsky Military Aerospace Academy*, 2015, no. 649, pp. 56–63. (in Russian)
6. Smagin V.A., Gusenitsa Ya.N. On the modeling of single-channel non-stationary systems with arbitrary distributions of incoming requests time and requests servicing. *Means of Communication Equipment*, 2018, no. 2(142), pp. 199–206. (in Russian)
7. Gusenitsa Y., Novikov A. The principle of “complex probabilities” balance, applied to simulation of non-stationary service systems represented by the cyclic graph of states. *Information and Space*, 2016, no. 3, pp. 71–74. (in Russian)
8. Smagin V.A., Gusenitsa Ya.N. Modeling single-channel non-stationary queueing systems presented in the form of a cyclic graph of states. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, vol. 59, no. 10, pp. 801–806. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-10-801-806>
9. Gusenitsa Ya.N. *The Principle of “Complex Probabilities” Balance and Its Application for Modeling Non-Markovian Processes*. Anapa, Voennyj innovatsionnyj tehnopolis «ERA», 2022, 47 p. (in Russian)
10. Cox D.R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1955, vol. 51, no. 2, pp. 313–319. <https://doi.org/10.1017/S0305004100030231>
11. Riordan J. *Stochastic Service Systems*. New York, Wiley and Sons Inc., 1962, 139 p.
12. Smagin V.A. *Probabilistic analysis of a complex variable*. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika*, 1999, no. 5, pp. 3–13. (in Russian)

13. Smagin V.A. Complex delta function and its information application // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2014. V. 48. N 1. P. 10–16. <https://doi.org/10.3103/S0146411614010064>
14. Смагин В.А., Филимоныхин Г.В. О моделировании случайных процессов на основе гипердельта распределения // *Автоматика и вычислительная техника*. 1990. № 1. С. 25–31.
15. Смагин В.А. Немарковские задачи теории надежности. Л.: МО РФ СССР, 1982. 269 с.
16. Ивановский В.С., Гусеница Я.Н., Ширямов О.А. Теоретические основы военной метрологии. Анапа: Федеральное государственное автономное учреждение «Военный инновационный технополис «ЭРА», 2021. 137 с.
17. Ширямов О.А. Стохастическая модель функционирования эталона единицы величины в условиях поступления дополнительных средств измерений на метрологическое обслуживание // *Системы управления, связи и безопасности*. 2018. № 1. С. 95–108.
18. Гусеница Я.Н. Немарковская модель функционирования системы управления подводного робота // *Состояние и перспективы развития современной науки по направлению «Гидроакустические системы обнаружения объектов»: сборник статей I Всероссийской научно-технической конференции*. Анапа: Федеральное государственное автономное учреждение «Военный инновационный технополис «ЭРА», 2021. С. 168–181.
19. Gusenitsa Y., Shiryamov O., Rzhavitin V., Buryj D., Ljvov D. Non-markov general model of the functioning of the robot control system in changing environmental conditions // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2023. V. 971. P. 38–48. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20631-3_5
20. Правоткин И.А. Генерирование изображения на основе текстовых данных с помощью Python на основе библиотеки Pillow // *Приоритетные направления инновационной деятельности в промышленности: сборник научных статей по итогам десятой международной научной конференции*. Ч. 2. М: Общество с ограниченной ответственностью «КОНВЕРТ», 2020. С. 78–79.
21. Таравский Е.А., Сингатуллово И.Ш. Использование Kivy framework для создания мобильного приложения на языке программирования Python // *Концепция развития и эффективного использования научного потенциала общества: сборник статей Международной научно-практической конференции*. В 2-х частях. Ч. 1. Уфа: Общество с ограниченной ответственностью «ОМЕГА САЙНС», 2020. С. 99–101.
22. Ari N., Ustazhanov M. Matplotlib in Python // *Proc. of the 11th International Conference on Electronics, Computer and Computation (ICECCO)*. 2014. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICECCO.2014.6997585>
23. Cywiak M., Cywiak D. SymPy // *Multi-Platform Graphics Programming with Kivy*. Apress, Berkeley, CA, 2021. P. 173–190. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-7113-1_11
24. Millman K.J., Aivazis M. Python for scientists and engineers // *Computing in Science & Engineering*. 2011. V. 13. N 2. P. 9–12. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2011.36>
25. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // *Nature Methods*. 2020. V. 17. N 3. P. 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
26. Гусеница Я.Н., Ширямов О.А. Система компьютерного моделирования немарковских процессов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022669820. 25.10.2022.
13. Smagin V.A. Complex delta function and its information application. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2014, vol. 48, no. 1, pp. 10–16. <https://doi.org/10.3103/S0146411614010064>
14. Smagin V.A., Filimonikhin G.V. On the modeling of random processes based on the hyperdelta distribution. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika*, 1990, no. 1, pp. 25–31. (in Russian)
15. Smagin V.A. *Non-Markovian Problems of Reliability Theory*. Leningrad, Ministry of Defense Soviet Union, 1982, 269 p. (in Russian)
16. Ivanovskii V.S., Gusenitca Ia.N., Shiriamov O.A. *Theoretical Background of the Military Metrolog.* Anapa, Voennyj innovacionnyj tehnopolis «ERA», 2021, 137 p. (in Russian)
17. Shiryamov O.A. Stochastic model of functioning of a measurement standard in conditions when a additional measuring instruments receipt into metrological maintenance. *Systems of Control, Communication and Security*, 2018, no. 1, pp. 95–108. (in Russian)
18. Gusenitca Ia.N. Non-Markovian functional model of an underwater robot control system. *State and prospects for the modern science development in the direction of "Hydroacoustic systems for detecting objects"*. *Collected papers of the 1st All-Russian Scientific and Technical Conference*. Anapa, Voennyj innovacionnyj tehnopolis «ERA», 2021, pp. 168–181. (in Russian)
19. Gusenitsa Y., Shiryamov O., Rzhavitin V., Buryj D., Ljvov D. Non-markov general model of the functioning of the robot control system in changing environmental conditions. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2023, vol. 971, pp. 38–48. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20631-3_5
20. Pravotkin I.A. Generating an image from text data with Python language based on Pillow library. *Priority areas of innovation in industry. Collection of scientific articles following the 10th International Scientific Conference*. Ch. 2. Moscow, KONVERT Publ., 2020, pp. 78–79. (in Russian)
21. Taravskii E.A., Singatullovo I.Sh. Using the Kivy framework to create a mobile application in the Python programming language. *The concept of development and efficient use of the society scientific potential. Collected papers of the International Scientific and Practical Conference (in two parts)*. Ch. 1. Ufa, Omega science Publ., 2020, pp. 99–101. (in Russian)
22. Ari N., Ustazhanov M. Matplotlib in Python. *Proc. of the 11th International Conference on Electronics, Computer and Computation (ICECCO)*, 2014, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICECCO.2014.6997585>
23. Cywiak M., Cywiak D. SymPy. *Multi-Platform Graphics Programming with Kivy*. Apress, Berkeley, CA, 2021, pp. 173–190. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-7113-1_11
24. Millman K.J., Aivazis M. Python for scientists and engineers. *Computing in Science & Engineering*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 9–12. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2011.36>
25. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
26. Gusenitca Ia.N., Shiriamov O.A. Computer simulation system for non-Markovian processes. *Certificate of registration of computer software 2022669820*. 25.10.2022. (in Russian)

Авторы

Гусеница Ярослав Николаевич — кандидат технических наук, начальник научно-исследовательского отдела, Военный инновационный технополис «ЭРА», Анапа, 353456, Российская Федерация, orcid.org/0000-0003-4757-5066, yaromir226@gmail.com

Ширямов Олег Анатольевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Военно-космическая академия А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0002-8985-8251>, shiryamov_oa@mail.ru

Authors

Yaroslav N. Gusenitsa — PhD, Head of Department, Military Innovative Technopolis “ERA”, Anapa, 353456, Russian Federation, orcid.org/0000-0003-4757-5066, yaromir226@gmail.com

Oleg A. Shiryamov — PhD, Senior Researcher, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0002-8985-8251>, shiryamov_oa@mail.ru

Статья поступила в редакцию 17.11.2022
Одобрена после рецензирования 29.11.2022
Принята к печати 20.01.2023

Received 17.11.2022
Approved after reviewing 29.11.2022
Accepted 20.01.2023



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»