

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-3-500-504

УДК 534.01

О влиянии сосредоточенного включения на спектр собственных колебаний струны и балки Бернулли–Эйлера

Дмитрий Сергеевич Вавилов¹, Виктория Владимировна Головина²✉,
Алексей Андреевич Кудрявцев³

^{1,2} Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

¹ londr@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0137-152X>

² victoria_gol@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-2691-7680>

³ alex.18.11@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1228-8377>

Аннотация

Предмет исследования. Представлены результаты исследования малых поперечных колебаний струны и балки Бернулли–Эйлера с сосредоточенным включением. Физические характеристики струны и балки считаются постоянными величинами, а включение моделируется с помощью дельта-функции Дирака и описывается двумя параметрами: местоположением и массой. Рассматривается задача об определении этих параметров по измерению сдвига резонансной частоты. **Метод.** В качестве основного метода исследования предложено разложение функции перемещения по собственным формам. Коэффициенты разложения определяются с помощью метода Гринберга. В случае точечного дефекта их подстановка в исходное разложение позволяет получить характеристическое уравнение, определяющее влияние включения на собственные частоты струны и балки. **Основные результаты.** Представлено аналитическое решение задачи о малых поперечных колебаниях струны и балки Бернулли–Эйлера с точечным включением. Предложен метод нахождения частотных уравнений, полностью определяющих его влияние на спектр колебаний. На основе предложенного метода выведены соотношения, позволяющие идентифицировать параметры включения, получены зависимости этих параметров от сдвига резонансной частоты. Показана возможность независимого определения массы и местоположения дефекта по измерению сдвига двух собственных частот. **Обсуждение.** Работа направлена на развитие аналитических методов моделирования динамики континуальных механических систем с неоднородной структурой. Описание их динамического отклика представляет значительный практический интерес при создании различного типа датчиков, таких как акселерометры, датчики скорости, давления и другие. Полученные результаты могут быть использованы при разработке детекторов массы, работа которых основана на изменении собственной частоты колебаний.

Ключевые слова

балка Бернулли–Эйлера, струна, спектральная задача, собственные частоты, сосредоточенное включение

Ссылка для цитирования: Вавилов Д.С., Головина В.В., Кудрявцев А.А. О влиянии сосредоточенного включения на спектр собственных колебаний струны и балки Бернулли–Эйлера // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 3. С. 500–504. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-3-500-504

On the influence of a concentrated inclusion on the spectrum of natural vibrations of a string and Bernoulli-Euler beam

Dmitry S. Vavilov¹, Victoria V. Golovina²✉, Aleksey A. Kudryavtsev³

^{1,2} Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation

¹ londr@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0137-152X>

² victoria_gol@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-2691-7680>

³ alex.18.11@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1228-8377>

Abstract

The results of a study of small transverse vibrations of a string and Bernoulli-Euler beam with a concentrated inclusion are presented. The physical properties of the string and the beam are assumed to be constant, the inclusion is modeled using the Dirac delta function and described by two parameters: location and mass. The problem of determining these parameters by measuring the shift of the resonant frequency is considered. The basic method is the eigenfunction expansion of displacement. Expansion coefficients are determined using the Greenberg method. Their substitution into the original expansion in the case of a point defect allows us to obtain a characteristic equation that determines the effect of inclusion on the string and beam natural frequencies. An analytical solution to the problem of small transverse vibrations of a string and Bernoulli-Euler beam with a point inclusion is presented. A method for possessing frequency equations that completely determine the influence of inclusion on the oscillation spectrum is proposed. Basing on the proposed method, expressions for identifying the inclusion parameters are derived, and the dependences of these parameters on the resonant frequency shift are presented. The possibility of independently determining the mass and location of the defect by measuring the shift of two natural frequencies is shown. The work is aimed at developing analytical methods for modeling the dynamics of continuum mechanical systems with a heterogeneous structure. The description of their dynamic response is of significant practical interest for creating various types of sensors, such as accelerometers, speed sensors, pressure sensors and others. The results obtained in this article can be used in the elaboration of mass detectors, the operation of which is based on changes in the natural frequency of oscillations.

Keywords

Bernoulli-Euler beam, string, spectral problem, natural frequencies, concentrated inclusion

For citation: Vavilov D.S., Golovina V.V., Kudryavtsev A.A. On the influence of a concentrated inclusion on the spectrum of natural vibrations of a string and Bernoulli-Euler beam. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 3, pp. 500–504 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-3-500-504

Введение

Современные материалы часто обладают сложной многокомпонентной структурой, которая включает в себя разнообразные включения и дефекты, отличающиеся друг от друга по геометрическим и энергетическим характеристикам. Их присутствие в материалах проявляется в особом протекании динамических процессов, т. е. не по классическим моделям сплошной среды [1, 2]. Таким образом, на сегодняшний день важной задачей, имеющей большое практическое значение для разработки методов неразрушающего контроля, является определение параметров включения по динамическому отклику материала [3–5]. Еще одно направление, где данная тематика находит широкое применение, связано с разработкой различного типа датчиков: акселерометры, датчики давления, детекторы масс и т. д. Работа этих электромеханических устройств основана на явлении модальной локализации [6–8] или изменении собственной частоты колебаний [9–12]. Например, в работе [12] рассмотрена задача определения массы точечного включения на струне по сдвигу первых двух резонансных частот. В настоящей работе рассмотрена механическая система, состоящая из балки или струны с сосредоточенным включением, полностью характеризующимся только двумя параметрами — местоположением дефекта и его массой. Данная упрощенная модель дефекта позволяет получить точные аналитические выражения для его характеристик в зависимости от смещения резонансной частоты. В отличие от [12] предложен более общий подход, связанный с получением частотных уравнений, который позволяет использовать для определения параметров включения любую пару собственных частот.

Цель работы — получить на основе частотных уравнений точные аналитические выражения для характеристик включения в зависимости от сдвига резонансной частоты.

Вывод частотных уравнений для струны и балки Бернулли–Эйлера с сосредоточенным включением

Рассмотрим изгибные колебания шарнирно-закрепленной балки Бернулли–Эйлера длиной l с точечной массой m , расположенной в точке с координатой ξ , отсчитываемой от левого конца балки. Уравнение, описывающее динамику данной системы, имеет вид [13]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{m\delta(x-\xi)\ddot{w}}{\rho\mu^2}, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ — поперечное смещение балки; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Параметр $\mu^2 = \frac{EJ}{\rho}$ равен отношению изгибной жесткости балки к ее линейной плотности ρ , где E — модуль Юнга материала; J — момент инерции поперечного сечения.

Решение, соответствующее свободным колебаниям, может быть представлено в виде:

$$w(x, t) = v(x)e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где ω — частота; $v(x)$ — амплитудная функция, определяющая форму колебаний. После подстановки выражения (2) в (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $v(x)$, удовлетворяющей граничным условиям: $v(0) = v(l) = 0$, $v''(0) = v''(l) = 0$,

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\omega^2 v}{\mu^2} = \frac{\omega^2 m \delta(x-\xi)}{\rho\mu^2}. \quad (3)$$

Представим решение уравнения (3) в виде разложения в ряд по собственным формам балки без включения

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4)$$

Тогда, используя фильтрующее свойство дельта-функции, с помощью метода Гринберга [14] найдем выражение для неизвестных коэффициентов

$$v_n = \frac{2m\omega^2}{\rho l} \frac{v(\xi)}{\mu^2 \pi^4 n^4 - \omega^2} \sin \frac{\pi n \xi}{l}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) и положив $x = \xi$, получим характеристическое уравнение

$$\frac{2m\omega^2 l^3}{\rho \mu^2 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n \xi}{l}}{n^4 - a^4} = 1, \quad (6)$$

где $a^2 = \frac{\omega l^2}{\pi^2 \mu}$ — параметр, определяющий смещение собственной частоты балки. Чтобы привести уравнение (6) к удобному для вычислений виду, запишем выражение, стоящее под знаком суммы, в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n \xi}{l}}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} \cos \frac{2\pi n \xi}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \cos \frac{2\pi n \xi}{l} \right). \quad (7)$$

Суммирование рядов в скобках выражения (7) выполним с помощью формул, приведенных в работе [15]. В результате преобразований характеристическое уравнение (6) примет вид

$$\frac{\pi m a}{4 \rho l} F(a, \xi) = 1, \quad (8)$$

где аналитическое представление функции $F(a, \xi)$ определим выражением

$$F(a, \xi) = \frac{\cos(\pi a(1 - 2\beta)) - \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)} + \frac{\operatorname{ch}(\pi a(1 - 2\beta)) - \operatorname{ch}(\pi a)}{\operatorname{sh}(\pi a)}, \quad (9)$$

т. е. изменение спектра колебаний зависит от двух параметров: отношения массы включения к массе балки $\alpha = \frac{m}{\rho l}$ и его относительного положения $\beta = \frac{\xi}{l}$.

Пример графического решения уравнения (8) при $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,5$ для первых трех частот приведен на рис. 1.

Искомое значение параметра a найдем в точке пересечения графика $aF(a, \beta)$ с горизонтальной прямой $\frac{4}{\pi \alpha}$.

Вертикальные прямые на графике, при которых a принимает целые значения, соответствуют собственным частотам балки без включения. Отсутствие корня вблизи прямой $a = 2$ объясняется тем, что рассматривается случай, когда дефект расположен в узле второй формы и не может оказать влияние на ее частоту.

Отметим, что описанный подход применим и для уравнения 2-го порядка, моделирующего поперечные колебания струны с инерционным включением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{m \delta(x - \xi) \ddot{w}}{T}, \quad (10)$$

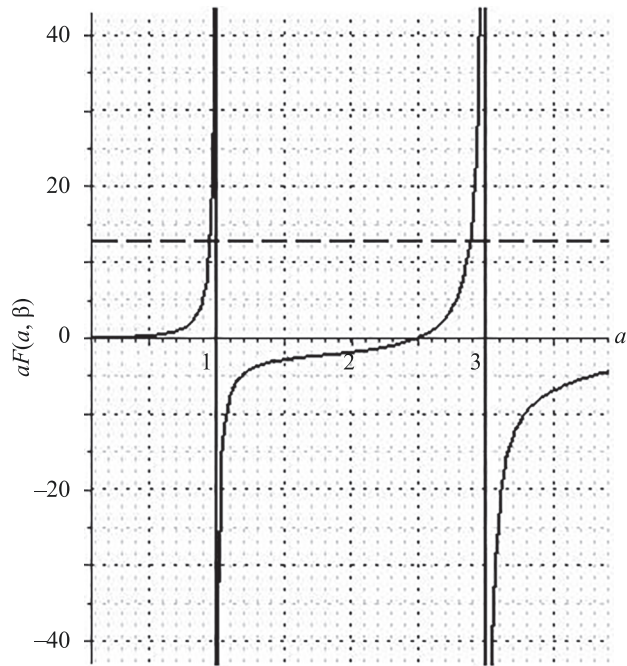


Рис. 1. Спектр колебаний балки, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,5$

Fig. 1. Beam vibration spectrum, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$

где T — сила натяжения струны; $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ — скорость распространения звука в струне.

Выполним аналогичные преобразования для уравнения (10). В результате характеристическое уравнение (8), определяющее спектр собственных колебаний, имеет вид

$$\frac{\pi m a}{2 \rho l} F(a, \xi) = 1, \quad (11)$$

где $a = \frac{\omega l}{\pi c_0}$ и $F(a, \xi) = \frac{\cos(\pi a(1 - 2\beta)) - \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)}$ — первое слагаемое уравнения (9).

Существенно более простой вид этой функции по сравнению с аналогичной для балки Бернулли–Эйлера позволяет не только найти массу включения, но и решить обратную задачу: найти местоположение дефекта с заданной массой. Рассмотрим несколько модельных примеров.

Определение параметров сосредоточенного включения

Если известно расположение точечного включения на балке, то уравнение (8) может быть использовано для определения его массы по измеренному сдвигу первой резонансной частоты, определяющему параметр a . Зависимость $a(a)$ при различных значениях параметра β показана на рис. 2.

Аналогичные кривые получаются при выбранных граничных условиях и при симметричном расположении дефекта относительно центра балки.

С помощью уравнения (11) найдем не только массу, но и относительное расстояние между положением

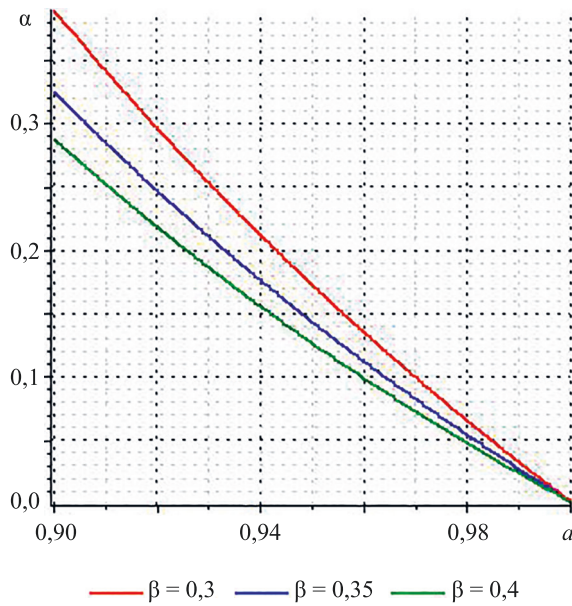


Рис. 2. Зависимость $\alpha(a)$
Fig. 2. Dependence $\alpha(a)$

включения и центром струны, т. е. определим величину $r = \left| \frac{1}{2} - \beta \right|$. В результате решения тригонометрического уравнения запишем:

$$r = \frac{1}{2\pi a} \arccos \left(\cos \pi a + \frac{2 \sin \pi a}{a \pi a} \right). \quad (12)$$

Отметим, что область допустимых значений параметра a регулируется выполнением неравенства:

$$\left| \cos \pi a + \frac{2 \sin \pi a}{a \pi a} \right| \leq 1.$$

Кривые, соответствующие выражению (12), представлены на рис. 3.

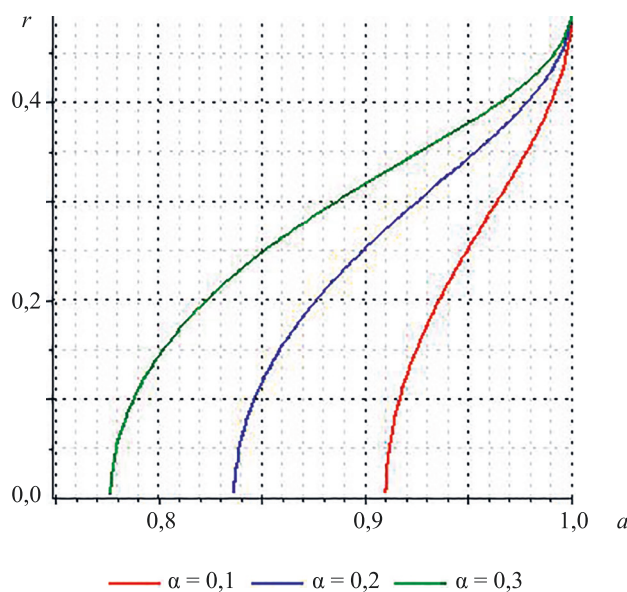


Рис. 3. Зависимость $r(a)$
Fig. 3. Dependence $r(a)$

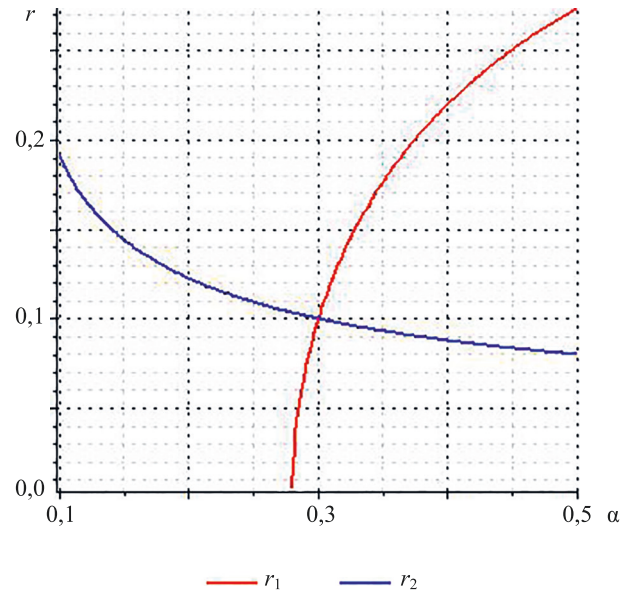


Рис. 4. Зависимости $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$
Fig. 4. Dependence $r_1(\alpha)$ and $r_2(\alpha)$

Однако при проведении исследования чаще складывается ситуация, когда имеется очень мало априорной информации о свойствах дефекта, т. е. неизвестны и масса, и его положение. Покажем, что выражение (12) может быть использовано для определения обоих параметров, если существует возможность провести измерение не одной, а двух собственных частот, в качестве которых примем $\omega_1 = \frac{a_1 \pi c_0}{l}$ и $\omega_2 = \frac{a_2 \pi c_0}{l}$. Для этого заметим, что данное выражение остается справедливым независимо от номера частоты:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2\pi a_1} \arccos \left(\cos \pi a_1 + \frac{2 \sin \pi a_1}{a \pi a_1} \right); \\ r_2 &= \frac{1}{2\pi a_2} \arccos \left(\cos \pi a_2 + \frac{2 \sin \pi a_2}{a \pi a_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассматривая в соотношениях (13) a как независимый параметр, построим на одном графике зависимости $r_1(a)$ и $r_2(a)$. Тогда точка пересечения этих кривых определит относительную массу включения a и его расстояние r относительно центра струны. Пример построения кривых при $a_1 = 0,788$ и $a_2 = 1,856$ приведен на рис. 4.

Заключение

В результате проведенного исследования получены частотные уравнения для струны и балки Бернулли–Эйлера с сосредоточенным включением, характеризующимся его положением и массой. С помощью полученных уравнений можно определить массу дефекта в зависимости от изменения резонансной частоты. Для струны удалось решить обратную задачу определения местоположения дефекта с заданной массой. Предложен метод определения обоих параметров включения по сдвигам двух резонансных частот.

Литература

1. Glazov A.L., Muratkov K.L. Generalized thermoelastic effect in real metals and its application for describing photoacoustic experiments with Al membranes // *Journal of Applied Physics*. 2020. V. 128. N 9. P. 095106. <https://doi.org/10.1063/5.0013308>
2. Glazov A.L., Muratkov K.L. The influence of mechanical stresses on the characteristics of laser-ultrasonic signals in the vicinity of a hole in silicon nitride ceramics // *Technical Physics Letters*. 2021. V. 47. N 8. P. 605–608. <https://doi.org/10.1134/s1063785021060225>
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Влияние дефекта массы на частоты и формы продольных колебаний стержня // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2014. № 1. С. 135–144.
4. Akulenko L.D., Baidulov V.G., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. N 6. P. 708–714. <https://doi.org/10.3103/s0025654417060103>
5. Rabinovich D., Givoli D., Turkel E. Single-field identification of inclusions and cavities in an elastic medium // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2024. V. 125. N 1. P. e7364. <https://doi.org/10.1002/nme.7364>
6. Thiruvengatanathan P., Yan J., Woodhouse J., Aziz A., Seshia A.A. Ultrasensitive mode-localized mass sensor with electrically tunable parametric sensitivity // *Applied Physics Letters*. 2010. V. 96. N 8. P. 081913. <https://doi.org/10.1063/1.3315877>
7. Pachkawade V. State-of-the-art in mode-localized MEMS coupled resonant sensors: A comprehensive review // *IEEE Sensors Journal*. 2021. V. 21. N 7. P. 8751–8779. <https://doi.org/10.1109/jsen.2021.3051240>
8. Индейцев Д.А., Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А. Модель микромеханического модально-локализованного акселерометра с чувствительным элементом в виде балки с начальной погибью // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 3. С. 135–151. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600645>
9. Dohn S., Svendsen W., Boisen A., Hansen O. Mass and position determination of attached particles on cantilever based mass sensors // *Review of Scientific Instruments*. 2007. V. 78. N 10. P. 103303. <https://doi.org/10.1063/1.2804074>
10. Schmid S., Dohn S., Boisen A. Real-time particle mass spectrometry based on resonant micro strings // *Sensors*. 2010. V. 10. N 9. P. 8092–8100. <https://doi.org/10.3390/s100908092>
11. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2016. V. 26. N 10. P. 105009. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/10/105009>
12. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I. Frequency shifts of micro and nano cantilever beam resonators due to added masses // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2016. V. 138. N 9. P. 091002. <https://doi.org/10.1115/1.4033075>
13. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М: Высшая школа, 1980. 406 с.
14. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 414 с.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981. 798 с.

Авторы

Вавилов Дмитрий Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [sc 55939416900](https://orcid.org/0000-0002-0137-152X), londr@yandex.ru

Головина Виктория Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [sc 17434019700](https://orcid.org/0000-0002-2691-7680), victoria_gol@mail.ru

Кудрявцев Алексей Андреевич — инженер-исследователь, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, [sc 57208774821](https://orcid.org/0000-0002-1228-8377), alex.18.11@yandex.ru

References

1. Glazov A.L., Muratkov K.L. Generalized thermoelastic effect in real metals and its application for describing photoacoustic experiments with Al membranes. *Journal of Applied Physics*, 2020, vol. 128, no. 9, pp. 095106. <https://doi.org/10.1063/5.0013308>
2. Glazov A.L., Muratkov K.L. The influence of mechanical stresses on the characteristics of laser-ultrasonic signals in the vicinity of a hole in silicon nitride ceramics. *Technical Physics Letters*, 2021, vol. 47, no. 8, pp. 605–608. <https://doi.org/10.1134/s1063785021060225>
3. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Mass defect influence on the longitudinal vibration frequencies and mode shapes of a beam. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 104–111. <https://doi.org/10.3103/s0025654414010129>
4. Akulenko L.D., Baidulov V.G., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 708–714. <https://doi.org/10.3103/s0025654417060103>
5. Rabinovich D., Givoli D., Turkel E. Single-field identification of inclusions and cavities in an elastic medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2024, vol. 125, no. 1, pp. e7364. <https://doi.org/10.1002/nme.7364>
6. Thiruvengatanathan P., Yan J., Woodhouse J., Aziz A., Seshia A.A. Ultrasensitive mode-localized mass sensor with electrically tunable parametric sensitivity. *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 96, no. 8, pp. 081913. <https://doi.org/10.1063/1.3315877>
7. Pachkawade V. State-of-the-art in mode-localized MEMS coupled resonant sensors: A comprehensive review. *IEEE Sensors Journal*, 2021, vol. 21, no. 7, pp. 8751–8779. <https://doi.org/10.1109/jsen.2021.3051240>
8. Indeitsev D.A., Mozhgova N.V., Lukin A.V., Popov I.A. Model of a micromechanical mode-localized accelerometer with an initially curved microbeam as a sensitive element. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 779–792. <https://doi.org/10.3103/S0025654422601355>
9. Dohn S., Svendsen W., Boisen A., Hansen O. Mass and position determination of attached particles on cantilever based mass sensors. *Review of Scientific Instruments*, 2007, vol. 78, no. 10, pp. 103303. <https://doi.org/10.1063/1.2804074>
10. Schmid S., Dohn S., Boisen A. Real-time particle mass spectrometry based on resonant micro strings. *Sensors*, 2010, vol. 10, no. 9, pp. 8092–8100. <https://doi.org/10.3390/s100908092>
11. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2016, vol. 26, no. 10, pp. 105009. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/26/10/105009>
12. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I. Frequency shifts of micro and nano cantilever beam resonators due to added masses. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2016, vol. 138, no. 9, pp. 091002. <https://doi.org/10.1115/1.4033075>
13. Бидерман В.Л. *Mechanical Vibration Theory*. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1980, 406 p. (in Russian)
14. Sveshnikov A.G., Bogoliubov A.N., Kravtsov V.V. *Lectures in Mathematical Physics*. Moscow, MSU Publ., 2004, 414 p. (in Russian)
15. Prudnikov A.P., Brychkov Iu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1981, 798 p. (in Russian)

Authors

Dmitry S. Vavilov — PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, [sc 55939416900](https://orcid.org/0000-0002-0137-152X), londr@yandex.ru

Victoria V. Golovina — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Mozhaisky Military Aerospace Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, [sc 17434019700](https://orcid.org/0000-0002-2691-7680), victoria_gol@mail.ru

Aleksey A. Kudryavtsev — Research Engineer, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, [sc 57208774821](https://orcid.org/0000-0002-1228-8377), alex.18.11@yandex.ru