НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
январь–февраль 2025 Том 25 № 1 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
January–February 2025 Vol. 25 No 1 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-160-168
УДК 519.7

Построение согласованной функции расстояния для простого марковского канала

Алина Максимовна Вересова[1]✉, Андрей Анатольевич Овчинников[2]

[1,2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, 190008, Российская Федерация

[1] amveresova@gmail.com✉, https://orcid.org/0000-0002-3792-9249
[2] a.ovchinnikov@hse.ru, https://orcid.org/0000-0002-8523-9429

Аннотация
Введение. Проблема исправления ошибок в канале связи может быть решена определением наиболее вероятного вектора ошибок в канале. При этом в ряде случаев решается эквивалентная задача нахождения вектора минимального веса. Это требует введения функции расстояния, согласованной с каналом связи. В классической теории кодирования традиционно используются метрики Хэмминга и Евклида, в то время как для многих каналов связи согласованные с ними функции расстояния неизвестны. Построение таких функций может снизить вероятность ошибки декодирования и является актуальной задачей. В данной работе предложено решение проблемы разработки функции декодирования, совпадающей с декодированием по максимуму правдоподобия в простом марковском канале. **Метод.** Выполнен анализ вероятностей векторов в простом марковском канале. Разработанная функция расстояния представлена как сумма набора коэффициентов, зависящих от параметров канала. Предложен способ вычисления коэффициентов, при которых функция является согласованной с каналом. Рассмотрено несколько аппроксимаций для случая, когда параметры канала неизвестны или известны неточно. На примере сверточного кодирования экспериментально оценено влияние предложенной функции и ее аппроксимаций на вероятность ошибки. **Основные результаты.** Сформулировано правило, обеспечивающее декодирование по максимуму правдоподобия в простом марковском канале. Предложенная функция расстояния согласована с каналом при любых длинах кодов, в отличие от известных марковских метрик. Рассмотрены вопросы выбора коэффициентов функции декодирующего правила, упрощающие вычисление функции с возможным нарушением согласованности. На основе полученной функции представлена экспериментальная оценка вероятности ошибки по максимуму правдоподобия для сверточного кода в простом марковском канале. Приведена оценка влияния аппроксимации коэффициентов на вероятность ошибки декодирования. Дано сравнение предложенного решения с известным классом марковских метрик. **Обсуждение.** Проведенные эксперименты показали, что предложенная согласованная функция и ее упрощенный вариант обеспечивают значительное снижение вероятности ошибки по сравнению с метрикой Хэмминга, а также известной марковской метрикой при низких значениях априорной вероятности битовой ошибки. Использование квантований значений функции практически не увеличивает вероятность ошибки декодирования по сравнению с декодированием по максимуму правдоподобия. Метод, основанный на анализе вероятности векторов в канале с двумя состояниями, может быть использован при разработке декодирующих функций для более сложных моделей каналов Гилберта и Гилберта–Эллиотта. Такие функции позволяют повысить надежность передачи сообщений в каналах со сложной структурой шума и обеспечивают декодирование по максимуму правдоподобия в марковском канале, в то время как традиционный подход к декорреляции канала существенно снижает пропускную способность.

Ключевые слова
канал с конечным числом состояний, марковские цепи, согласованные метрики, декодирование по максимуму правдоподобия, правило декодирования, алгоритм Витерби

Благодарности
Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), лаборатория Интернета вещей и киберфизических систем НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге.

Ссылка для цитирования: Вересова А.М., Овчинников А.А. Построение согласованной функции расстояния для простого марковского канала // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 1. С. 160–168. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-160-168

Construction of matched distance function for simple Markov channel

Alina M. Veresova[1]✉, Andrei A. Ovchinnikov[2]

[1,2] HSE University, Saint Petersburg, 190008, Russian Federation

[1] amveresova@gmail.com✉, https://orcid.org/0000-0002-3792-9249

[2] a.ovchinnikov@hse.ru, https://orcid.org/0000-0002-8523-9429

Abstract

The problem of error correction in communication channel may be solved by finding the most probable error vector in the channel. The equivalent in some cases problem may be formulated as finding the vector of least weight. To perform this, the distance function is needed matched to communication channel. Hamming and Euclid metrics are traditionally used in classical coding theory, but for many channels the correspondent matched distance functions are unknown. Finding such functions would allow decoding error probability decreasing, and it is actual task. In this paper the problem of decoding function development is solved, providing maximum likelihood decoding in simple Markov channel. Analysis of vectors probability in simple Markov channel is performed. The developed function is presented as sum of coefficients from the set depending on channel parameters. The way of coefficient computation is mentioned, providing matching the function with channel. Some approximations of coefficients are given for the case when channel parameters are unknown or uncertain. Affect of this function and its approximations on error probability is estimated experimentally using convolutional code. The decoding rule is proposed providing maximum likelihood decoding in simple Markov channel. Proposed function is matched with the channel for all code lengths, as opposed to known Markov metrics. The selection of coefficients for the decoding rule function is considered, simplifying computations by cost of possible losing the matching property. Error probability of maximum likelihood decoding using proposed function is estimated experimentally for convolutional code in simple Markov channel. The affect of coefficients approximation on decoding error probability increasing is estimated. The comparison with the class of known Markov metrics is performed. Experiments show that both proposed matched function and its simplifications provide significant gain in decoding error probability comparing to Hamming metric, and comparing to known Markov metric in area of low a priori channel bit error probabilities. Usage of quantized values of proposed function practically does not increase the error probability comparing to maximum likelihood decoding. The method based on analysis of error probability in two-state channels may be used to develop decoding functions for more complex Gilbert and Gilbert–Elliott channel models. Such functions would allow significant increasing in data transmission reliability in channels with complicated noise structure and provide maximum likelihood decoding in Markov channel with memory, instead of traditional approach which uses decorrelation of the channel and significantly reduces capacity.

Keywords

finite-state channel, Markov chain, matched metrics, maximum-likelihood decoding, decoding rule, Viterbi algorithm

Acknowledgements

The article was prepared within the framework of the Basic Research Program at HSE University, Internet of Things and Cyber-Physical Systems Laboratory, Saint Petersburg School of Physics, Mathematics, and Computer Science.

For citation: Veresova A.M., Ovchinnikov A.A. Construction of matched distance function for simple Markov channel. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 1, pp. 160–168 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-160-168

Введение

При передаче информации в различных сетях одной из важнейших задач является обеспечение надежности передачи. Понятие надежности включает в себя много аспектов: вероятность доставки, задержки доставки, помехозащищенность данных, защищенность от неавторизованных пользователей и т. п. [1, 2]. Хотя эти задачи разнородны, зачастую они решаются с помощью специальным образом введенной, и используемой тем или иным образом информационной избыточности [3, 4]. В настоящей работе рассматриваются задачи, связанные с внесением избыточности на физическом уровне сети с помощью методов помехоустойчивого кодирования [1, 5].

При рассмотрении задачи исправления ошибок в классической теории кодирования чаще всего рассматриваются каналы с независимыми ошибками, такие как дискретный двоичный симметричный канал (ДСК) или полунепрерывный канал с аддитивным белым гауссовским шумом. Задача декодирования в этих каналах может быть сформулирована в терминах минимизации функции расстояния, обычно являющейся метрикой. Эта задача будет решаться с минимальной вероятностью ошибки, если метрика согласована с каналом. Для ДСК — метрика Хемминга, для канала с аддитивным белым гауссовским шумом — метрика Евклида. Однако представляют интерес и другие метрики, так как метрики Хэмминга и Евклида, как и соответствующие модели каналов, не всегда хорошо согласуются с характеристиками ошибок в реальных каналах. Значительный вклад в разработку проблематики метрик в теории кодирования внес Э. Габидулин, введя понятие ранговой метрики [6], в последние годы вопросу метрического описания каналов и установлению эквивалентности метрик посвящены работы [7–9]. Развитие этих работ как применительно к построению кодов, так и различным аспектам декодирования, можно найти в [10–13].

Большинство реальных каналов обладают памятью, это означает, что ошибки в них имеют тенденцию к группированию. Известно, что пропускная способность каналов с памятью выше, чем каналов без памяти. Однако для реализации минимальных вероятностей ошибки в каналах с памятью необходимо использовать как можно более точное описание специфики возникающих ошибок.

Кодированию для каналов с памятью с использованием современных кодовых конструкций в последние годы был посвящен ряд работ. Так, в работах [14–17] рассматривалось применение низкоплотностных кодов в каналах с памятью. В [18, 19] исследовано применение полярных кодов. Однако в перечисленных работах мало изучены вопросы декодирования по максимуму правдоподобия в каналах с памятью, и в основном внимание уделено разработке практических методов кодирования и декодирования и их экспериментальной оценке.

Цель настоящей работы — построение правила декодирования, которое приближалось бы к декодированию по максимуму правдоподобия для каналов, описываемых марковской цепью с двумя состояниями. В работе вводятся основные понятия метрического описания канала, анализируется согласованность класса метрик, называемых марковскими, с простым марковским каналом. На основе анализа вероятностного описания векторов в таком канале разрабатывается декодирующая весовая функция, обеспечивающая согласованность с простым марковским каналом. Приводятся результаты моделирования по оценке вероятности ошибки декодирования с использованием предложенного правила. Новизна предложенных решений состоит не только в построении функции (полуметрики), обеспечивающей декодирование по максимуму или почти по максимуму правдоподобия в простом марковском канале вне зависимости от параметров канала и кода, но и в рассмотренном подходе к построению полуметрики на основе анализа выражений, описывающих вероятности ошибок в каналах с двумя состояниями.

Метрическое описание каналов связи

Задача декодирования по максимуму правдоподобия [1, 5] при передаче по каналу с шумом может быть сформулирована как оптимизационная задача

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg\max_{\mathbf{a}\in\mathcal{C}} p(\mathbf{b}|\mathbf{a}),$$

где $\mathbf{a}$ — передаваемое кодовое слово кода $\mathcal{C}$; вектор $\mathbf{b}$ — слово, принятое из канала, вероятность $p(\mathbf{b}|\mathbf{a})$ называется функцией правдоподобия. Решением $\hat{\mathbf{a}}$ декодера является кодовое слово, максимизирующее значение функции правдоподобия, т. е. аргумент оптимального значения целевой функции. Такое декодирование требует задания модели канала, допускающей расчет условных вероятностей выходных последовательностей относительно входных.

Если канал имеет двоичный вход и двоичный выход, воздействие канала на передаваемые символы может быть описано с помощью вектора ошибки $\mathbf{e}$ такого, что

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e}.$$

Тогда максимизация функции правдоподобия эквивалентна максимизации вероятности $p(\mathbf{e}) = p(\mathbf{b}|\mathbf{a})$ вектора ошибки. Иногда для удобства говорят, что в канале «появляется вектор $\mathbf{e}$», и задание вероятностной модели канала означает и задание распределения вероятностей на множестве всех возможных векторов ошибки, т. е. вероятностей их появления.

Декодирование по минимуму расстояния описывается как оптимизационная задача

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg\max_{\mathbf{a}\in\mathcal{C}} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

где $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — функция, называемая расстоянием. Заметим, что в известных работах нет единого подхода к терминологии в данной области, поэтому будем придерживаться системы определений, используемых в [7, 8] и с точки зрения авторов наиболее подходящей к рассматриваемой проблематике. В этом варианте рассмотрим бинарную функцию d: $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ над элементами из множества X. Сформулируем ряд свойств (аксиом) для $x, y, z \in X$.

Аксиома 1. $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, x) = 0$.
Аксиома 2. $d(x, y) = d(y, x)$.
Аксиома 3. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
Аксиома 4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

В случае выполнения аксиом 1 и 2 назовем функцию d расстоянием, при выполнении аксиомы 3 — полуметрикой, при выполнении аксиомы 4 (неравенства треугольника) — метрикой. В теории кодирования наиболее часто используется метрика Хемминга, определяемая как число несовпадающих элементов двух последовательностей одинаковой длины, однако известны и другие метрики.

Функция расстояния связана, и более того, может быть определена через функцию веса как

$$d(x, y) = W(x - y).$$

Сформулируем условие, при котором решение оптимизационной задачи по минимуму расстояния совпадет с решением по максимуму правдоподобия: если для двух векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ выполняется $p(\mathbf{e}_1) > p(\mathbf{e}_2)$ (где $p(\mathbf{e}_1)$ и $p(\mathbf{e}_2)$ — вероятности появления $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в канале), должно выполняться также $W(\mathbf{e}_1) < W(\mathbf{e}_2)$, тогда более вероятный в данном канале вектор будет также и более легким, и максимизация вероятности совпадает с минимизацией веса. В этом случае функция расстояния (например, метрика, полуметрика и т. п.) называется согласованной с каналом.

В классической теории кодирования обычно рассматриваются функции расстояния, являющиеся метриками, однако для характеристики меры близости двух векторов достаточно выполнения аксиом 1–3. В этом случае декодирование по минимуму расстояния все еще будет совпадать с максимумом правдоподобия, если функция расстояния (полуметрика) согласована с каналом.

Пусть X — множество, на элементах которого задана полуметрика d_1. В [8] показано, что если $x, y \in X$, то функция d_2, определенная в соответствии с

$$\begin{cases} d_2(x, y) = 1 + \dfrac{d_1(x, y)}{\max\limits_{u,v \in X} d_1(u, v)}, & x \neq y \\ d_2(x, y) = 0, & x = y \end{cases} \qquad (1)$$

является метрикой. При этом d_1 и d_2 эквивалентны в том смысле, что дают одинаковое решение задачи декодирования по минимуму расстояния.

В дальнейшем рассмотрим каналы с памятью и их метрическое описание.

Функции расстояния для простого марковского канала

Пусть на вход канала связи поступает кодовая последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, а выходом является слово $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$. Канал не обладает памятью, если для рассматриваемой модели канала справедливо

$$p(\mathbf{b}|\mathbf{a}) = \prod_{i=0}^{n-1} p(b_i|a_i).$$

В противном случае говорят о каналах с памятью, в них вероятность искажения символа в отдельный момент времени зависит от того, были ли искажены предыдущие символы.

Наиболее часто используемым подходом при определении моделей дискретных каналов с памятью является задание шумового процесса с помощью марковской цепи, как правило, с двумя состояниями.

В случае модели простого двоичного марковского канала выделяют два состояния: «0» и «1», и вероятности перехода между ними P_{01} и P_{10}, тогда передаваемый бит всегда передается верно, если канал находится в состоянии «0», и всегда инвертируется, если канал в состоянии «1». В общем случае, задав вероятности битовых ошибок в каждом из состояний, можно перейти к моделям Гилберта и Гилберта–Эллиотта, которые в настоящей работе не рассматриваются.

Априорная вероятность того, что простой марковский канал сгенерирует битовую ошибку в определенный момент времени, равна

$$\Pr(1) = p_e = P_{01}/(P_{01} + P_{10}).$$

Применение перемежения к дискретным двоичным каналам с конечным числом состояний преобразует эти каналы в ДСК с переходной вероятностью p_e. Далее априорную вероятность p_e битовой ошибки в канале будем называть эквивалентной вероятностью ошибки. Известно, что эквивалентный ДСК, полученный с помощью перемежения, имеет меньшую пропускную способность, чем исходный канал с памятью, поэтому актуальной является задача построения методов декодирования для канала с памятью.

Для решения задачи построения функции расстояния, согласованной с каналом с конечным числом состояний, необходимо оценивать вероятности векторов ошибки в таком канале. В простом марковском канале эта вероятность может быть вычислена как

$$\Pr(\mathbf{e}) = \Pr(e_0)\prod_{i=1}^{n-1}\Pr(e_i|e_{i-1}) = \Pr(e_0)P_{00}^{l_{00}}P_{01}^{l_{01}}P_{10}^{l_{10}}P_{11}^{l_{11}},$$

где l_{ij} — число переходов из i в j в векторе ошибки $\mathbf{e}$. В дальнейшем рассмотрим задачу вычисления метрики, согласованной с простым марковским каналом.

В работах [1, 20, 21] рассматривалась метрика:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = d(\mathbf{e}),$$
$$W(\mathbf{e}) = e_0 + l_{10} + 2l_{01},$$

при $P_{11} < P_{00}$ являющаяся согласованной с простым марковским каналом, если длина передаваемых последовательностей не превышает некоторого значения:

$$n^* = \min\left\{\frac{\ln\left(P_{BG}/P_{GB}\right)}{\ln\left(P_{GG}/P_{BB}\right)} + 3;\ \frac{\ln\left(P_{GG}/P_{BG}\right)}{\ln\left(P_{GG}/P_{BB}\right)} + 3;\ \frac{\ln\left(P_{BB}/P_{BG}\right)}{\ln\left(P_{GG}/P_{BB}\right)} + 5\right\}. \qquad (2)$$

Используя формулу (2), можно убедиться, что значения длин n^*, представляющие практический интерес (несколько сотен бит), возможны при только больших значениях P_{00} и P_{11}.

Рассмотрим вопрос построения функции расстояния, возможно, не являющейся метрикой и согласованной с простым марковским каналом без ограничения на длину кода. Заметим, что вероятность вектора ошибки в марковском канале является произведением некоторых множителей q_i:

$$\Pr(\mathbf{e}) = \Pr(e_0)\prod_{i=1}^{n-1}\Pr(e_i|e_{i-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} q_i.$$

Значения q_i для $i > 0$ определяются переходными вероятностями, и

$$q_0 = \begin{cases} \Pr(1), & \text{если } e_0 = 1, \\ 1 - \Pr(1), & \text{если } e_0 = 0. \end{cases}$$

Для построения согласованной метрики можно выбирать функцию вычисления веса таким образом, что каждому множителю q_i ставится в соответствие неотрицательный весовой коэффициент ω_i, монотонно зависящий от q_i: если $q_i > q_j$, то $\omega_i < \omega_j$, и эти коэффициенты связаны в функцию, возрастающую от количества коэффициентов. Обладающая всеми перечисленными свойствами функция от вероятности события хорошо известна в теории информации — логарифмическая мера вероятности, характеризующая количество информации, содержащееся в событии. Примем $\omega_i = -\log_2 q_i$ и получим функцию с требующимися свойствами:

$$W(\mathbf{e}) = -\log_2 \Pr(\mathbf{e}) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i.$$

Заметим, что $W(\mathbf{e}) > 0$. Заданный таким образом вес от нулевого вектора не будет равен нулю, однако для этого специального случая функцию можно доопределить. Таким образом, получим функцию расстояния вида:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = W(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = W(\mathbf{e}) = -\sum_{i=0}^{n-1} \log_2 q_i,$$
$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Эта функция является полуметрикой, и при необходимости из нее можно получить метрику, используя преобразование (1). Такая функция и соответствующая ей метрика будут согласованы с простым марковским каналом. Фактически, речь идет о декодировании по максимуму правдоподобия, где максимизация вероятности заменена задачей минимизации ее логарифма, взятого с отрицательным знаком. Данное свойство будет выполняться для любого основания логарифма, большего единицы. В дальнейшем в расчетах используется логарифм по основанию два.

Можно заметить, что величины $\omega_i = \log_2 q_i$ принимают вещественные значения, что может быть неудобным на практике. В таблице приведены значения ω_i для некоторых значений P_{00}, P_{11}. Здесь $\omega_{ij} = -\log_2 P_{ij}$, $\omega_0 = -\log_2 q_0$.

Как видно из таблицы, простое округление коэффициентов может достаточно сильно исказить их значения друг относительно друга, что может сказаться на согласованности. Для решения этой проблемы можно предложить, например, следующую эвристическую стратегию. Введем коэффициент масштабирования $\kappa = 1/P_{01}$. Так, например, при $P_{00} = 0{,}9$ получим $\kappa = 10$, при $P_{00} = 0{,}99$ значение $\kappa = 100$ и т. д. Заменим коэффициенты ω_i (ω_{ij}) значениями $[\kappa\omega_i]$ ($[\kappa\omega_{ij}]$), где операция $[x]$ означает округление значения x. При этом согласованность функции расстояния может быть потеряна, но можно предположить, что на практике искажения будут незначительными.

Еще одним нежелательным свойством введенной функции расстояния является то, что для вычисления коэффициентов необходимо знать значения переходных вероятностей канала или хотя бы их оценки. С одной стороны, данное требование типично во многих системах связи для настройки параметров передачи и, в частности, кодово-модуляционной схемы. С другой стороны, можно поставить вопрос о влиянии точности коэффициентов на вероятность ошибки декодирования, и, если такое влияние незначительно — использовать фиксированный набор их значений одновременно для множества параметров модели канала.

Проведенное построение функции расстояния можно применить для более общих моделей каналов с двумя состояниями, например, модели Гилберта. Однако для таких моделей выражения для множителей q_i при вычислении вероятности вектора носят существенно более сложный характер, это остается направлением возможных дальнейших исследований.

Оценка вероятности ошибки декодирования по минимуму функции расстояния

Выполним экспериментальную оценку предложенной функции расстояния. Для этого сравним вероятности ошибки декодирования по критерию минимума предложенной функции с критерием декодирования по максимуму правдоподобия.

При выполнении декодирования как по минимуму расстояния, так и по максимуму правдоподобия обычно требуется полный перебор всех кодовых слов, что возможно только для блоковых кодов со сравнительно малыми значениями длины кода n и числа информаци-

Таблица. Значения коэффициентов ω_i для значений P_{00}: 0,9 и 0,99

Table. Values of coefficients ω_i for P_{00}: 0.9 and 0.99

Коэффициенты	Переходная вероятность P_{11}				
	0,1	0,5	0,7	0,9	0,99
$P_{00} = 0{,}9$					
ω_0	0,1520	0,2630	0,4150	1,0000	3,4594
ω_1	3,3219	2,5850	2,0000	1,0000	0,1375
ω_{00}	0,1520	0,1520	0,1520	0,1520	0,1520
ω_{01}	3,3219	3,3219	3,3219	3,3219	3,3219
ω_{10}	0,1520	1,0000	1,7370	3,3219	6,6439
ω_{11}	3,3219	1,0000	0,5146	0,1520	0,0145
$P_{00} = 0{,}99$					
ω_0	0,0159	0,0286	0,0473	0,1375	1,0000
ω_1	6,5078	5,6724	4,9542	3,4594	1,0000
ω_{00}	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145
ω_{01}	6,6439	6,6439	6,6439	6,6439	6,6439
ω_{10}	0,1520	1,0000	1,7370	3,3219	6,6439
ω_{11}	3,3219	1,0000	0,5146	0,1520	0,0145

онных символов k. С другой стороны, при рассмотрении каналов с памятью эффект группирования ошибок достаточно наглядно проявляется и могут быть оценены подходы к борьбе с ошибками в таких каналах лишь на достаточно большой длине. Потому для проведения экспериментов рассмотрим кодирование с помощью сверточных кодов и декодирование с помощью модифицированного декодера Витерби, предложенного в [21]. При использовании вещественной функции расстояния без округлений до целых коэффициентов декодер будет обеспечивать декодирование по максимуму правдоподобия.

В качестве кода возьмем широко используемый в научных работах сверточный код с регистром длиной два и двумя многочленами связей, коэффициенты которых в восьмеричном виде представлены как (7, 5). Будем передавать информацию блоками по 300 информационных символов с усечением (занулением) решетки по простому двоичному марковскому каналу. Канал будет характеризоваться фиксированным значением переходной вероятности P_{00}. В качестве критерия оценки используем частоту битовых информационных ошибок в зависимости от значения эквивалентной вероятности ошибки p_e. Рассмотрим применение следующих функций при декодировании:
- «hamming» — метрика Хэмминга;
- «markov» — марковская метрика;
- «log-ML» — декодирование по максимуму правдоподобия;
- «log-scaled» — функция с масштабированием и округлением коэффициентов;
- «log-scaled-approx» — функция с выбором коэффициентов без знания текущего параметра p_e.

На рис. 1 приведены результаты компьютерного моделирования для марковского канала с P_{00} = 0,9. График «uncoded» соответствует некодированной передаче. При выборе функции «log-scaled-approx» были вычислены коэффициенты, соответствующие p_e = 0,25 (ω_0 = 4; ω_1 = 20; ω_{00} = 1; ω_{01} = 33; ω_{10} = 17; ω_{11} = 5) и p_e = 0,15 (ω_0 = 2; ω_1 = 27; ω_{00} = 1; ω_{01} = 33; ω_{10} = 8; ω_{11} = 12). Из представленных графиков видно, что метрика «markov» уступает результатам, полученным с использованием функций «log-ML» и «hamming» при малых значениях p_e. Аппроксимированная функция, очевидно, совпадает с максимумом правдоподобия в точке параметра аппроксимации, однако проигрывает во многих остальных случаях.

Выберем значения аппроксимации, исходя из p_e = 0,5 (ω_0 = 10; ω_1 = 10; ω_{00} = 1; ω_{01} = 33; ω_{10} = 33; ω_{11} = 1) (рис. 2, *a*). Вероятности ошибки для аппроксимированной функции совпадают с результатами для декодирующих правил «markov» и «log-ML» для большого интервала значений p_e.

Таким образом, подстройкой коэффициентов аппроксимации по указанной методике можно приблизиться к декодированию по максимуму правдоподобия не только для значения эквивалентной вероятности ошибки, по которой строилась аппроксимация, но и для широкого диапазона значений.

Отметим нестандартный вид графика функции «log-ML» (рис. 2, *a*), который имеет экстремум в точке $p_e \approx 0{,}25$, что нетипично для традиционно получаемых в теории кодирования графиков вероятности ошибки, монотонно зависящих от параметра, задающих уровень шума в канале. Такое поведение кривой можно объяснить тем, что пропускная способность простого марковского канала является немонотонной функцией от p_e, убывающей для $p_e < 0{,}25$ и далее возрастающей, таким образом, имеющей минимум в области $p_e \approx 0{,}25$. Это означает, что параметр эквивалентной вероятности ошибки p_e (и соответственно — число ошибок во время передачи) не является параметром, монотонно «ухудшающим» канал. Это не является чем-то уникальным — в канале ДСК, к примеру, пропускная способность симметрична относительно вероятности битовой ошибки 0,5, и при стремлении доли ошибок к единице канал позволяет надежно передавать столько же информации, как и при стремлении доли ошибок к нулю.

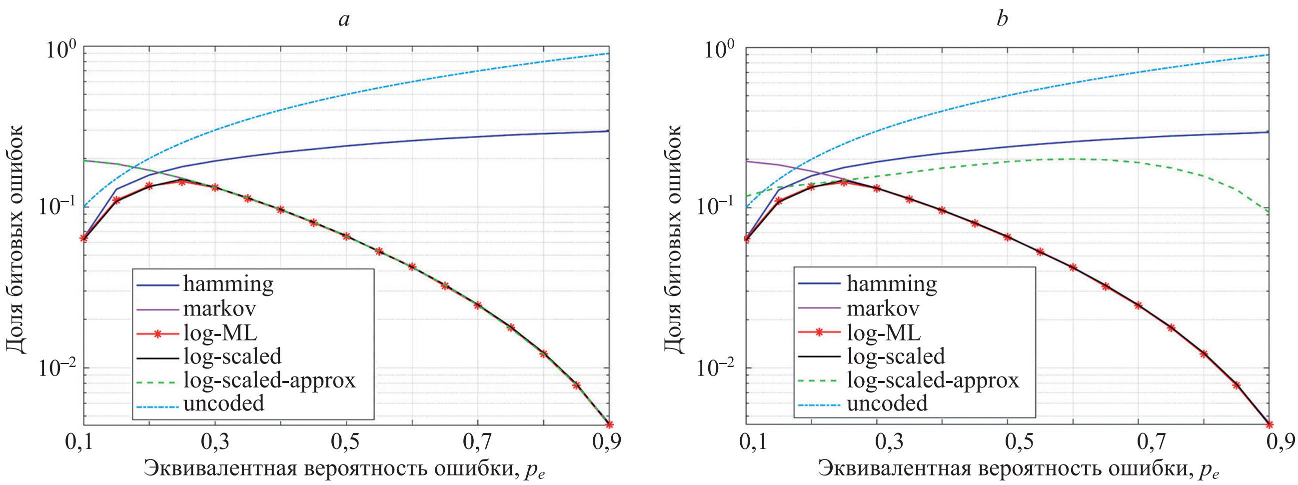

Рис. 1. Зависимость доли битовых ошибок от эквивалентной вероятности ошибки при P_{00} = 0,9 для аппроксимаций p_e = 0,25 (*a*) и p_e = 0,15 (*b*)

Fig. 1. Dependence of bit error rate from equivalent bit error probability for P_{00} = 0.9: approximation for p_e = 0.25 (*a*), approximation for p_e = 0.15 (*b*)

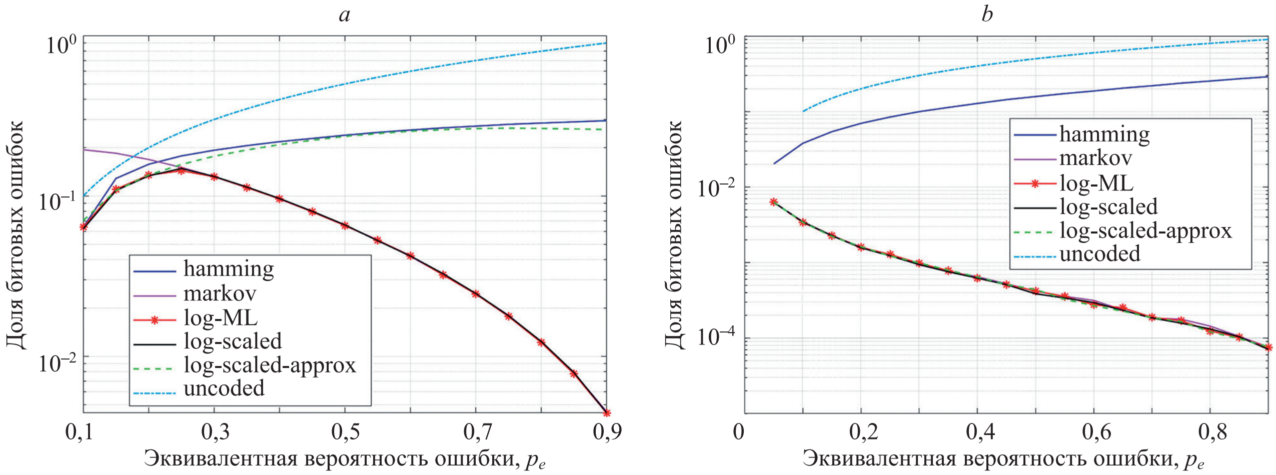

Рис. 2. Зависимость доли битовых ошибок от эквивалентной вероятности ошибки при P_{00} = 0,9 (*a*) и P_{00} = 0,99 (*b*)

Fig. 2. Dependence of bit error rate from equivalent bit error probability: for P_{00} = 0.9 (*a*), for P_{00} = 0.99 (*b*)

Также отметим, что в отличие от монотонно убывающей метрики «markov», предложенная функция декодирования «log-scaled» (используемая при условии знания параметров канала) следует виду с экстремумом кривой по максимуму правдоподобия.

Теперь рассмотрим простой марковский канал при P_{00} = 0,99 для аппроксимации p_e = 0,5 (ω_0 = 99; ω_1 = 99; ω_{00} = 1; ω_{01} = 664; ω_{10} = 664; ω_{11} = 1) (рис. 2, *b*). Практически все функции расстояния дают примерно одинаковый результат, за исключением метрики «hamming». Отметим, что для данного канала графики не имеют экстремумов — косвенно это можно объяснить тем, что пропускная способность простого марковского канала при P_{00} = 0,00 является функцией от p_e, близкой к монотонной.

Таким образом, рассмотренная методика вычисления коэффициентов предложенной функций декодирования дает достаточно гибкий инструмент для настройки функции декодирования в зависимости от параметров канала.

Заключение

В работе рассмотрены вопросы декодирования по максимуму правдоподобия и по минимуму расстояния в каналах с конечным числом состояний. Приведены понятия метрического описания канала связи, сформулирована задача построения функции расстояния (полуметрики) для использования при декодировании по минимуму расстояния.

На основании функции вычисления вероятности вектора в марковском канале предложена функция расстояния, принимающая вещественные значения и обеспечивающая декодирование по максимуму правдоподобия. Данная функция может быть преобразована в метрику, что позволяет сформулировать критерии для построения и анализа кодовых конструкций, ориентированных на декодирование в этой метрике.

Предложены варианты настройки целочисленных коэффициентов данной функции, что снимает строгое условие согласованности с каналом, однако проведенное экспериментальное сравнение предложенных упрощений с декодированием по максимуму правдоподобия демонстрирует практическое отсутствие ухудшения вероятности ошибки.

Метод построения функции расстояния может быть использован для попыток построения декодирующих функций для более интересных с точки зрения практики моделей каналов связи Гилберта и Гилберта–Эллиотта.

Литература

1. Крук Е.А. Комбинаторное декодирование линейных блоковых кодов. Монография. СПб: ГУАП, 2007, 238 с.
2. Bogatyrev A.V., Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. The probability of timeliness of a fully connected exchange in a redundant real-time communication system // Proc. of the Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). 2020. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/weconf48837.2020.9131517
3. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V. Multipath transmission of heterogeneous traffic in acceptable delays with packet replication and destruction of expired replicas in the nodes that make up the path // Communications in Computer and Information Science. 2023. V. 1748. P. 104–121. https://doi.org/10.1007/978-3-031-30648-8_9

References

1. Krouk E. A. *Combinatorial Decoding of Linear Block Codes*. St. Petersburg, SUAI Publ., 2007, 238 p. (in Russian)
2. Bogatyrev A.V., Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. The probability of timeliness of a fully connected exchange in a redundant real-time communication system. *Proc. of the Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, 2020, pp. 1–4. https://doi.org/10.1109/weconf48837.2020.9131517
3. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V. Multipath transmission of heterogeneous traffic in acceptable delays with packet replication and destruction of expired replicas in the nodes that make up the path. *Communications in Computer and Information Science*, 2023, vol. 1748, pp. 104–121. https://doi.org/10.1007/978-3-031-30648-8_9

4. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Control of multipath transmissions in the nodes of switching segments of reserved paths // Proc. of the International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). 2022. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/icct56057.2022.9976839
5. Lin S., Li J. Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes. Cambridge University Press, 2022. 840 p.
6. Gabidulin E. A brief survey of metrics in coding theory // Proc. of the Mathematics of Distances and Applications. 2012. P. 66–84.
7. Firer M., Walker J.L. Matched metrics and channels // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. V. 62. N 3. P. 1150–1156. https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2512596
8. D'Oliveira R., Firer M. Channel metrization // European Journal of Combinatorics. 2019. V. 80. P. 107–119. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.02.026
9. Qureshi C.M. Matched metrics to the binary asymmetric channels // IEEE Transactions on Information Theory. 2019. V. 65. N 2. P. 1106–1112. https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2885782
10. Miyamoto G.A., Firer M. Obtaining binary perfect codes out of tilings // IEEE Transactions on Information Theory. 2020. V. 66. N 10. P. 6121–6132. https://doi.org/10.1109/TIT.2020.2988865
11. Cotardo G., Ravagnani A. Parameters of codes for the binary asymmetric channel // IEEE Transactions on Information Theory. 2022. V. 68. N 5. P. 2941–2950. https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3147593
12. Zhang A., Jing X., Feng K. Optimal combinatorial neural codes with matched metric δr: characterization and constructions // IEEE Transactions on Information Theory. 2023. V. 69. N 8. P. 5440–5448. https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3266010
13. Xu Y., Kan H., Han G. MacWilliams extension property with respect to weighted poset metric // IEEE Transactions on Information Theory. 2024. V. 70. N 2. P. 995–1007. https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3328262
14. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel–Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures // IEEE Transactions on Communications. 2021. V. 69. N 5. P. 2812–2823. https://doi.org/10.1109/tcomm.2021.3059001
15. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst Error Identification Method for LDPC Coded Systems // IEEE Communications Letters. 2024. V. 28. N 7. P. 1489–1493. https://doi.org/10.1109/lcomm.2024.3391826
16. Ovchinnikov A.A., Veresova A.M., Fominykh A.A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events // Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]. 2022. N 6. P. 41–52. https://doi.org/10.31799/1684-8853-2022-6-41-52
17. Исаева М.Н., Овчинников А.А. Исправление одиночных пакетов ошибок за пределами корректирующей способности кода с использованием информационных совокупностей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, N 1. С. 70–80. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80
18. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H.D., Permuter H.H. Data-Driven polar codes for unknown channels with and without memory // Proc. of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). 2023. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/isit54713.2023.10206663
19. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert-Elliott channel with unknown parameter // IEEE Transactions on Communications. 2021. V. 69. N 10. P. 6455–6468. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2021.3095195
20. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in Two-State channels with memory // Proc. of the XVII International Symposium Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY). 2021. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
21. Veresova A., Ovchinnikov A. Usage of Markov Metric in decoding of convolutional codes in Two-State channels // Proc. of the IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE). 2024. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/piere62470.2024.10805044

4. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Control of multipath transmissions in the nodes of switching segments of reserved paths. *Proc. of the International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT)*, 2022, pp. 1–5. https://doi.org/10.1109/icct56057.2022.9976839
5. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge University Press, 2022, 840 p.
6. Gabidulin E. A brief survey of metrics in coding theory. *Proc. of the Mathematics of Distances and Applications*, 2012, pp. 66–84.
7. Firer M., Walker J.L. Matched metrics and channels. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2016, vol. 62, no. 3, pp. 1150–1156. https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2512596
8. D'Oliveira R., Firer M. Channel metrization. *European Journal of Combinatorics*, 2019, vol. 80, pp. 107–119. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.02.026
9. Qureshi C.M. Matched metrics to the binary asymmetric channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, vol. 65, no. 2, pp. 1106–1112. https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2885782
10. Miyamoto G.A., Firer M. Obtaining binary perfect codes out of tilings. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2020, vol. 66, no. 10, pp. 6121–6132. https://doi.org/10.1109/TIT.2020.2988865
11. Cotardo G., Ravagnani A. Parameters of codes for the binary asymmetric channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2022, vol. 68, no. 5, pp. 2941–2950. https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3147593
12. Zhang A., Jing X., Feng K. Optimal combinatorial neural codes with matched metric δr: characterization and constructions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2023, vol. 69, no. 8, pp. 5440–5448. https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3266010
13. Xu Y., Kan H., Han G. MacWilliams extension property with respect to weighted poset metric. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2024, vol. 70, no. 2, pp. 995–1007. https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3328262
14. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel–Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. https://doi.org/10.1109/tcomm.2021.3059001
15. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst Error Identification Method for LDPC Coded Systems. *IEEE Communications Letters*, 2024, vol. 28, no. 7, pp. 1489–1493. https://doi.org/10.1109/lcomm.2024.3391826
16. Ovchinnikov A.A., Veresova A.M., Fominykh A.A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems*], 2022, no. 6, pp. 41–52. https://doi.org/10.31799/1684-8853-2022-6-41-52
17. Isaeva M.N., Ovchinnikov A.A. Correction of single error bursts beyond the code correction capability using information sets. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 70–80. (in Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80
18. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H.D., Permuter H.H. Data-Driven polar codes for unknown channels with and without memory. *Proc. of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2023, pp. 1–6. https://doi.org/10.1109/isit54713.2023.10206663
19. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert-Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2021.3095195
20. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in Two-State channels with memory. *Proc. of the XVII International Symposium Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY)*. 2021, pp. 1–6. https://doi.org/10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
21. Veresova A., Ovchinnikov A. Usage of Markov Metric in decoding of convolutional codes in Two-State channels. *Proc. of the IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE)*, 2024, pp. 1–5. https://doi.org/10.1109/piere62470.2024.10805044

Авторы

Вересова Алина Максимовна — младший научный сотрудник, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, 190008, Российская Федерация, sc 57211275192, https://orcid.org/0000-0002-3792-9249, amveresova@gmail.com

Овчинников Андрей Анатольевич — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, 190008, Российская Федерация, sc 57207711162, https://orcid.org/0000-0002-8523-9429, a.ovchinnikov@hse.ru

Authors

Alina M. Veresova — Junior Researcher, HSE University, Saint Petersburg, 190008, Russian Federation, sc 57211275192, https://orcid.org/0000-0002-3792-9249, amveresova@gmail.com

Andrei A. Ovchinnikov — PhD, Associate Professor, Leading Researcher, HSE University, Saint Petersburg, 190008, Russian Federation, sc 57207711162, https://orcid.org/0000-0002-8523-9429, a.ovchinnikov@hse.ru

Статья поступила в редакцию 19.11.2024
Одобрена после рецензирования 19.12.2024
Принята к печати 23.01.2025

Received 19.11.2024
Approved after reviewing 19.12.2024
Accepted 23.01.2025