

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

10.17586/2226-1494-2025-25-2-345-353

УДК 621.3.01; 512.62

Полиномы комплексной мощности для решения задачи идентификации параметров линейной цепи Николай Владимирович Коровкин¹, Алексей Юрьевич Гришенцев²✉

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

² Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ Nikolay.Korovkin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>

² AGrishentsev@yandex.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

Аннотация

Введение. Идентификация параметров линейных электрических цепей относится к задачам анализа и обратным задачам физики. Современные исследования в этой области преимущественно сводятся к определению импульсной характеристики и/или передаточной функции электрической цепи. Задачи идентификации параметров линейных электрических цепей обычно ограничиваются выявлением двух-трех последовательно и/или параллельно соединенных линейных компонентов или Т- и П-образных четырехполюсников. Идентификация параметров в этом случае происходит путем исследования схемы в режимах короткого замыкания и холостого хода. Существуют несколько частных решений задачи идентификации на одной заданной частоте. В работе предложено решение задачи идентификации параметров линейных электрических цепей с использованием полиномов, выражающих комплексную мощность и дополнительных уравнений. **Метод.** Для решения задачи идентификации параметров пассивного линейного двухполюсника разработан метод синтеза основных уравнений с использованием разности комплексной мощности, вычисленной аналитически и полученной в результате приборных измерений, и представленной интерполяционным полиномом. Разработан метод синтеза дополнительных уравнений на основании производных по частоте от комплексных сопротивления и проводимости. Верхняя граница числа независимых уравнений оценивается как мощность множества степеней при круговой частоте, входящей в состав исследуемого полинома. Оценка наибольшего числа независимых уравнений позволяет сделать вывод о разрешимости задачи с применением основных уравнений, а также необходимости формирования дополнительных уравнений. Решения задачи идентификации параметров линейных пассивных электрических цепей реализуются численно методами компьютерной алгебры. **Основные результаты.** Практическое применение разработанных методов показано на примере численного моделирования. В качестве примера практического применения предлагаемых методов показано решение задачи определения параметров компонентов реальной схемы. Моделирование реализовано в программной среде Wolfram Mathematica. **Обсуждение.** Предложенное решение, в отличие от известных подходов, позволяет определять параметры компонентов линейных пассивных электрических цепей (двухполюсников). Разработан метод синтеза уравнений на основании разностей комплексной мощности, полученной в результате аналитического расчета и приборных измерений. Представлен метод синтеза дополнительных уравнений путем дифференцирования по частоте комплексных сопротивления и проводимости. Внедрение метода позволяет получить относительно простые формы уравнений. Уравнения можно синтезировать заранее для наиболее распространенных типовых схем.

Ключевые слова

электротехника, радиоэлектроника, радиофизика, теория автоматического управления, линейные электрические цепи, идентификация параметров, анализ цепей, математическое обеспечение САПР

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект тематики научных исследований № 2019-0898.

Ссылка для цитирования: Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю. Полиномы комплексной мощности для решения задачи идентификации параметров линейной цепи // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 2. С. 345–353. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-2-345-353

© Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю., 2025

Complex power polynomials for solving the problem of identifying linear circuit parameters

Nikolay V. Korovkin¹, Alexey Yu. Grishentsev²✉

¹ Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation

² ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ Nikolay.Korovkin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>

² AGrishentsev@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

Abstract

The identification of parameters of linear electrical circuits refers to the problems of analysis and inverse problems of electrical engineering. Modern research in this field mainly boils down to determining the impulse response and/or the transfer function of an electrical circuit. The tasks of identifying the parameters of linear electrical circuits are usually limited to identifying two or three linear components connected in series and/or in parallel, or as T- and U-shaped four-poles. In this case, the parameters are identified by examining the circuit in short-circuit and idle modes. There are also several particular solutions to the problem of identification at a given frequency. In this paper, we propose a solution to the problem of identifying the parameters of linear electrical circuits using polynomials expressing complex power and additional equations. To solve the problem of identifying the parameters of a passive linear bipolar, a method has been developed for synthesizing basic equations using the difference in complex power, calculated analytically and calculated as a result of instrument measurements and represented by an interpolation polynomial. A method for synthesizing additional equations based on the frequency derivatives of complex resistance and complex conductivity has been developed. The upper bound of the number of independent equations is estimated as the power of the set of degrees at a circular frequency, which is part of the polynomial under study. Estimating the largest number of independent equations will allow us to conclude that the problem is solvable using the basic equations, as well as the need to form additional equations. The solutions to the problem of identifying the parameters of linear passive electrical circuits are implemented numerically using computer algebra. The practical application of the developed methods is shown by the numeric example. As an example of the application of the proposed methods, the solution of the problem of determining the parameters of all elements of an electrical circuit is shown. The simulation is implemented in the Wolfram Mathematica software environment. The proposed solution, unlike the known approaches, allows us to determine the parameters of the components of linear passive electrical circuits (bipolar). For the first time, a method for synthesizing equations based on differences in complex power obtained as a result of analytical calculations and instrument measurements is proposed. The method of synthesizing additional equations by differentiating complex resistances and conductivities by frequency makes it possible to obtain relatively simple forms of equations. Such equations can be synthesized in advance for the most common typical schemes.

Keywords

electrical engineering, radio electronics, radiophysics, automatic control theory, linear electrical circuits, parameter identification, circuit analysis, CAD

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, State Assignment no. 2019-0898.

For citation: Korovkin N.V., Grishentsev A.Yu. Complex power polynomials for solving the problem of identifying linear circuit parameters. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 2, pp. 345–353 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-2-345-353

Введение

Многие задачи радиофизики, радиоэлектроники и электротехники, а также смежных направлений (геофизики, автоматического управления и других), сводятся к идентификации параметров линейной электрической цепи (ИПЛЭЦ). Решение задачи ИПЛЭЦ актуально для определения параметров групп датчиков, расположенных в активных средах или труднодоступных частях устройств и сооружений [1], для определения параметров биофизических схем замещения [2] при моделировании биологических и геофизических объектов, наладке аппаратуры с применением методов идентификации и пр.

С другой стороны, разработка методов идентификации параметров линейных систем в общем, и линейных электрических цепей [3] в частности, способствует развитию фундаментальных дисциплин. Например, таких дисциплин как теоретическая электротехника [4], теория автоматического управления, теория систем

автоматизированного проектирования (САПР) в части математического обеспечения [5–7].

Значительный вклад в развитие теории идентификации в области электротехники внесли следующие отечественные и зарубежные исследователи: Г. Крон, П.А. Бутырин, В.В. Филаретов, С.А. Курганов и др. [8–11].

Достаточно большое число публикаций по теории идентификации представлено в теории автоматического управления и смежных областях [12–14].

Задача идентификации линейных электрических цепей может быть интерпретирована и решена различными методами. Если рассматривать линейную цепь как «черный ящик», то может понадобиться решение задачи идентификации топологии схемы, подобные задачи могут быть актуальны в обратных задачах геофизики и других приложениях. Задача топологической идентификации нетривиальна и пока общего решения не имеет. В случае, если линейная цепь представлена «черным ящиком», то задача идентификации импуль-

сней характеристики, во временной области и передаточной функции в частотной области, в настоящее время решена и используется в электротехнике и в теории автоматического управления. Если линейная схема рассматривается как «серый ящик» (Grey Box [15]), например, в случае известной топологии и неизвестных параметрах схемы, то решение такой задачи имеется только для некоторых частных случаев, например, для случая Т- или П-образного четырехполюсника. В работе [1] рассмотрено частное решение, позволяющее производить идентификацию параметров компонентов «серого ящика» с известной топологией. Отметим, что задача идентификации параметров компонентов линейной цепи, представимой в виде «серого ящика» с известной топологией, в общем виде не решена. В настоящей работе предлагается вариант общего решения, которое является основным результатом исследований.

Предлагаемые в работе методы можно использовать в качестве математической основы построения приборных систем ИПЛЭЦ, а значит, их разработка способствует развитию отрасли приборостроения.

В ряде обратных задач идентификации необходимо знать значения параметров элементов цепи, а не только передаточную функцию. Примерами таких задач являются: идентификация нагрузки трансформатора подстанции; идентификация параметров групп датчиков, размещенных в недоступных для непосредственного измерения отдельных компонентов конструкциях и сооружениях; идентификация элементов RLC контуров антенно-фидерных устройств, контуров гетеродинных приемников, фильтров и других устройств; идентификация параметров для выявления неисправных компонентов или компонентов с параметрами, не соответствующими определенным в рамках заданной конструкции; идентификация компонентов в биологических и геофизических схемах замещения при известной топологии схемы и других. Спектр задач, в которых необходима идентификация параметров компонентов линейных цепей, достаточно широк.

Таким образом, актуальность работы обоснована, а результаты востребованы и способствуют развитию теории идентификации параметров линейных систем и практики построения приборных систем идентификации.

Задача исследования: разработка и совершенствование методов идентификации параметров линейной цепи на основе полинома комплексной мощности.

Исследования, приведенные в данной работе, основаны на положениях, принятых в теоретической электротехнике, в частности использованы идеальные RLC-компоненты (катушка индуктивности, конденсатор, резистор). Такие идеальные компоненты не «шумят» (у них нет теплового шума) и обладают только одними сосредоточенными в пространстве параметрами: индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, причем параметры неизменны от времени, частоты, температуры, тока, напряжения и т. д. Способ использования идеальных компонентов для моделирования линейных цепей надежен и вместе с законами Г.Р. Кирхгофа, элементами теории графов, дифференциальными уравнениями во временной области и их

операторными преобразованиями является основой построения теории линейных электрических цепей.

В работе не исследуется влияние шумов измерения на точность идентификации, а также обусловленность и устойчивость решения, что актуально для настоящих и будущих исследований. Следует отметить, что в работе [16] приведены исследования обусловленности получаемых уравнений, а также влияния возмущения входных данных задачи идентификации на ошибку решения. В настоящей работе внимание авторов сосредоточено на предлагаемых методах формирования основных уравнений на базе полиномов комплексной мощности и дополнительных уравнений за счет вычисления производных от комплексных сопротивления и проводимости. Влияния шумов и методы противодействия шумам, т. е. извлечения полезной информации на фоне шумов, достаточно хорошо исследованы в курсе статистической радиотехники [17, 18] и могут быть использованы для развития предлагаемой в работе теории при разработке практических методов реализации.

Постановка задачи и метод составления базовых уравнений

В качестве основы постановки задачи рассмотрим двухполюсник (рис. 1) с внешними полюсными зажимами 1 и 2, к которым подключен источник электродвижущей силы (ЭДС) $\dot{E}(\omega)$, при этом через ветвь, содержащую ЭДС, протекает комплексный ток $\dot{I}(\omega)$, где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота. Схема линейного RLC двухполюсника известна, но номинальные значения некоторых или всех параметров RLC-компонентов схемы неизвестны. Обозначим компоненты с неизвестными параметрами x_k , $k = \overline{1, K}$; компоненты с известными параметрами — h_p , $p = \overline{1, P}$. Тогда $M = (P + K)$ — полное число компонентов схемы. Задача сводится к расчету численных величин элементов множества $\{x_k\}$, т. е. ИПЛЭЦ.

Используя закон Ома, запишем следующие уравнения:

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} \\ Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая, что схема двухполюсника известна, выразим комплексные сопротивление $Z(\omega)$ и проводимость $Y(\omega)$ через отношение полиномов, которые

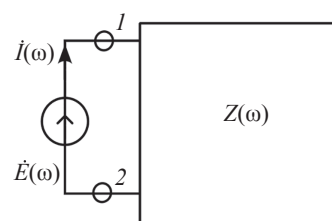


Рис. 1. Двухполюсник
Fig. 1. Two-pole circuit

несложно получить, например, методом контурных токов [4]:

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \\ Y(\omega) = \frac{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \end{cases}, \quad (2)$$

где $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$ — полином, выражающий напряжение на зажимах 1 и 2; $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$ — полином, выражающий ток в ветви, содержащей зажимы 1 и 2.

Известно, что комплексную мощность в цепи переменного тока можно рассчитать с помощью выражения: $S(\omega) = \dot{U}(\omega)\dot{I}^*(\omega)$, где $\dot{U}(\omega)$ и $\dot{I}(\omega)$ — комплексные напряжение и ток, подводимой цепи; $\dot{I}^*(\omega)$ — величина комплексно-сопряженная с $\dot{I}(\omega)$.

На основании уравнений (1) и (2), запишем выражение комплексной мощности для исследуемого двухполюсника:

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_I^*(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = \dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega). \quad (3)$$

Пусть в частном случае все компоненты двухполюсника (рис. 1) неизвестны, т. е. $\{h_p\} = \emptyset$, $P = 0$ и x_k , $k = 1, M$, тогда выражение (3) можно записать в виде:

$$P_U(\{x_k\}, \omega)P_I^*(\{x_k\}, \omega) = \dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega). \quad (4)$$

Причем $\dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega)$ — произведение измеренных величин. Для этого произведения получим интерполяционный полином:

$$\dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega) = \sum_{v=0}^V r_v \omega^v, \quad (5)$$

где r_v — полиномиальные коэффициенты при ω^v , $v = 0, V$ — целочисленный индекс и показатель степени. Для получения интерполяционного полинома возможно использовать различные методы, обеспечивающие точное решение при известных точных значениях функции и аргумента в узлах интерполяции или минимальную ошибку при приближенных значениях функции и аргумента в узлах интерполяции. В настоящей работе и в [16], учитывая использование идеальных компонентов и отсутствия шумов измерения, применен метод интерполяции на основе схемы Горнера, позволяющий при известных точных значениях функции и аргумента в узлах интерполяции получить точное выражение интерполяционного полинома [19, 20]. При наличии шумов и приближенных значениях функции в узлах интерполяции оценить ошибку можно с помощью остаточного члена и методов оценки погрешности известных из вычислительной математики [19, 20].

Используя (5) и сгруппировав правую и левую части (4) по степеням при ω^v , $v = 0, V$ запишем следующее выражение:

$$\sum_{v=0}^V \left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v} - r_v \right) \omega^v = 0, \quad (6)$$

где $l_1^v l_2^v \dots l_M^v$ — индексы суммы, а также индексы коэффициентов $G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v}$ полинома, и показатели степени различных комбинаций произведений $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v}$ неизвестных $\{x_k\}$. Выражение суммы $\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v}$ означает частичную сумму полинома (4), включающее сумму всех членов в виде произведения коэффициентов $G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v}$ на произведение неизвестных $G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v}$ при заданном значении v степени при ω .

Выражение $\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v}$ может быть записано иначе: $\sum_{l_1^v} \sum_{l_2^v} \dots \sum_{l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v}$. Далее в разделе «Пример численного моделирования» приведен частный случай полинома (4).

Если все параметры схемы известны (вычислены или измерены), т. е. $\{x_k\} = \emptyset$ и h_p , $p = 1, M$, то выражение (6) будет иметь вид:

$$\sum_{v=0}^V \left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} h_1^{l_1^v} h_2^{l_2^v} \dots h_M^{l_M^v} - r_v \right) \omega^v = 0. \quad (7)$$

Теорема. Все частичные суммы $\left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} h_1^{l_1^v} h_2^{l_2^v} \dots h_M^{l_M^v} - r_v \right)$ полинома (7) равны нулю.

Доказательство. В силу функционального равенства $P_U(\{h_p\}, \omega)P_I^*(\{h_p\}, \omega) = \dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega)$, а значит $P_U(\{h_p\}, \omega)P_I^*(\{h_k\}, \omega) = \sum_{v=0}^V r_v \omega^v$, и общности формы в смысле упорядоченности по степеням $v = 0, V$ при ω , каждая частичная сумма $\left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} h_1^{l_1^v} h_2^{l_2^v} \dots h_M^{l_M^v} - r_v \right)$, при нулевой погрешности измерений ЭДС $\dot{E}(\omega)$ и тока $\dot{I}^*(\omega)$ равна нулю, т. е. $\left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} h_1^{l_1^v} h_2^{l_2^v} \dots h_M^{l_M^v} - r_v \right) = 0$, что требовалось доказать.

Следствие 1. Каждая частичная сумма из (6) образует уравнение

$$\left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v} - r_v \right) = 0.$$

Замечание 1. На практике встречаются полиномы вида (6) которые могут содержать нулевые значения

$\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v} = 0$ и $r_v = 0$, для некоторых степеней v , $v < V$ при круговой частоте ω . Обозначим буквой $\Lambda = (0, 1, \dots, V)$ — упорядоченное множество всевозможных степеней, включая нулевую, при ω ; Ω — подмножество множества Λ , т. е. $\Omega \subseteq \Lambda$, которое содержит только те степени при ω , для которых

$\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v} \neq 0$ и $r_v \neq 0$. Тогда число уравнений вида $\left(\sum_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} G_{l_1^v l_2^v \dots l_M^v} x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_M^{l_M^v} - r_v \right) = 0$ которые можно получить из (7), будет $\text{card}(\Omega)$ — мощность множества Ω .

Следствие 2. Число независимых уравнений, которые можно получить из (6) с помощью разделения на частичные суммы $\left(\sum_{l_1^y \dots l_M^y} G_{l_1^y \dots l_M^y} x_1^{l_1^y} x_2^{l_2^y} \dots x_M^{l_M^y} - r_y \right) = 0$, не превышает $\text{card}(\Omega)$.

Замечание 2. Не превосходящее $\text{card}(\Omega)$ максимальное число уравнений вида $\left(\sum_{l_1^y \dots l_M^y} G_{l_1^y \dots l_M^y} x_1^{l_1^y} x_2^{l_2^y} \dots x_M^{l_M^y} - r_y \right) = 0$ можно получить из (4), т.е. для случая, когда параметры всех компонентов схемы неизвестны $\{h_p\} = \emptyset$.

Замечание 3. Следует отметить, что рассмотренный способ синтеза уравнений основан на разности комплексных мощностей $S(\omega)$ полученных в аналитической форме и с помощью измерений. С точки зрения электротехники такой подход обоснован и имеет физический смысл, но для составления уравнений и решения задачи достаточно алгебраического смысла. При этом выражение (3) может иметь вид:

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = \dot{E}(\omega) \dot{I}(\omega), \quad (8)$$

т.е. не содержать комплексного сопряжения.

В результате для уравнения (8) будет справедлива теорема и следствия 1 и 2.

Замечание 4. Параметры схемы имеют вещественные значения, т.е. $x_k, h_p \in \mathbb{R}$ и $x_k > 0, h_p > 0$ для $k = \overline{1, K}, p = \overline{1, P}$ и $M = P + K$.

Следствие 3. Условия $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0, k = \overline{1, K}$ необходимо использовать для отделения посторонних корней при решении (6) или (8).

Синтез дополнительных уравнений. При решении практических задач могут возникать ситуации, когда число неизвестных $x_k, k = \overline{1, K}$, больше числа уравнений $K > \text{card}(\Omega)$, в таком случае для вычисления $x_k, k = \overline{1, K}$ необходимы дополнительные уравнения. Рассмотрим метод синтеза дополнительных уравнений.

Метод синтеза основан на взятии интегралов или производных (в настоящей работе рассмотрены производные) от комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$ по круговой частоте ω . Так, например, первые производные для выражений (1), (2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} Z'(\omega) = \frac{\dot{E}'(\omega) \dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega) \dot{I}'(\omega)}{\dot{I}^2(\omega)} \\ Y'(\omega) = \frac{\dot{I}'(\omega) \dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega) \dot{E}'(\omega)}{\dot{E}^2(\omega)} \end{cases} \quad (9)$$

и

$$\begin{cases} Z'(\omega) = \frac{P_U'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \\ Y'(\omega) = \frac{P_I'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_U'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \end{cases} \quad (10)$$

Применив к выражениям (9) и (10) аналогичные преобразования (3)–(8), получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} (P_U'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)) \times \\ \times P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = (\dot{E}'(\omega) \dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega) \dot{I}'(\omega)) \dot{I}^2(\omega) \\ (P_I'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_U'(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)) \times \\ \times P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = (\dot{I}'(\omega) \dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega) \dot{E}'(\omega)) \dot{E}^2(\omega) \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (11) являются полиномами, степень которых и характеристика $\text{card}(\Omega)$ может быть больше аналогичной характеристики для (3). При использовании интегралов от комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$, получаемые выражения не являются полиномами, поэтому их анализ требует отдельного исследования, выходящего за рамки данной работы.

Заметим, что уравнения (11) не будут иметь смысл комплексной мощности даже при использовании комплексного сопряжения, поэтому если комплексное сопряжение не позволяет дополнительно упростить выражение (11), применение комплексного сопряжения для уравнений (11) использовать не имеет смысла.

Отметим, что производные от комплексных сопротивлений $Z'(\omega)$ и проводимости $Y'(\omega)$ имеют различные формы и, как следствие, позволяют получить различные формы уравнений. При этом эксперимент показывает, что уравнения (9) и (10) являются независимыми как между собой, так и по отношению к уравнениям, получаемым из (6). Данный факт позволяет решать задачи, в которых число неизвестных превышает $\text{card}(\Omega)$ для (6).

Подчеркнем, что для полученных полиномов (11) справедлива доказанная теорема и ее следствия.

Измерения и преобразования сигналов.

Измерение напряжения и тока на входе двухполюсника удобно производить с помощью запоминающего осциллографа, обеспечивающего достаточную точность как за счет разрешения по амплитуде, так и за счет числа отсчетов. В качестве альтернативного способа измерений можно использовать векторный анализатор, который сразу позволяет получить значения измеряемых величин в частотной области. При измерениях с помощью осциллографа во временной области преобразование в частотную область несложно выполнить за счет дискретного преобразования Фурье. Отдельного внимания требует вычисление производных тока $\frac{d^{(n)} \dot{I}(\omega)}{d\omega^{(n)}}$ и напряжения $\frac{d^{(n)} \dot{U}(\omega)}{d\omega^{(n)}}$ по частоте на основании измерений тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$, сделанных во временной области, для этого можно воспользоваться дискретными аналогами известных [21, 22] формул:

$$\begin{cases} \frac{d^{(n)} \dot{I}(\omega)}{d\omega^{(n)}} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) t^n e^{-j\omega t} dt \\ \frac{d^{(n)} \dot{U}(\omega)}{d\omega^{(n)}} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) t^n e^{-j\omega t} dt \end{cases} \quad (12)$$

где $i(t)$ — ток и $u(t)$ — напряжение во временной области; t — время; n — порядок производной.

Другой способ вычисления производных тока $\frac{d^{(n)}\dot{I}(\omega)}{d\omega^{(n)}}$ и напряжения $\frac{d^{(n)}\dot{U}(\omega)}{d\omega^{(n)}}$ по частоте можно реализовать методом конечных разностей, используя вычисленные с помощью преобразования Фурье значения комплексных тока $\dot{I}(\omega)$ и напряжения $\dot{U}(\omega)$.

Как известно вычисление производных с помощью правых или левых конечных разностей дает смещение (в данном случае по частоте), поэтому предпочтительнее использовать метод вычисления производной за счет свойств гармонических функций и преобразования Фурье с помощью выражения (12).

Пример численного моделирования

В качестве примера практического применения предлагаемых методов рассмотрим решение следующей задачи. Пусть необходимо определить параметры всех компонентов схемы (рис. 2) при известном токе $\dot{I}(\omega)$ в ветви, содержащей зажимы 1 и 2, и напряжении на зажимах $\dot{E}(\omega)$. Моделирование будем производить в программной среде Wolfram Mathematica¹.

С помощью метода контурных токов при заданном значении ЭДС $\dot{E}(\omega)$ вычислим функции комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(\omega) = \frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + j\omega R_1 L_2 + j\omega R_2 L_1 + j\omega R_3 L_1 + j\omega R_3 L_2 - \omega^2 L_1 L_2}{R_2 + R_3 + j\omega L_2} \\ Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{R_2 + R_3 + j\omega L_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + j\omega R_1 L_2 + j\omega R_2 L_1 + j\omega R_3 L_1 + j\omega R_3 L_2 - \omega^2 L_1 L_2} \end{array} \right. , \quad (13)$$

где $j = \sqrt{-1}$; L_1 и L_2 — индукции.

Полагая, что все компоненты схемы неизвестны, введем следующие обозначения $R_1 = x_1$, $R_2 = x_2$, $R_3 = x_3$, $L_1 = x_4$ и $L_2 = x_5$. Используя (13), запишем полином в форме (4) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 - \\ - j\omega(x_2^2 x_4 + 2x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_4 + 2x_1 x_2 x_5 + 2x_1 x_3 x_5 + \\ + 2x_2 x_3 x_5 + x_3^2 x_5) - \\ - \omega^2(x_1 x_5^2 + x_3 x_5^2 + 2x_2 x_4 x_5 + 2x_3 x_4 x_5) + \\ + j\omega^3 x_4 x_5^2 = \dot{E}(\omega) \dot{I}^*(\omega) \end{array} \right. . \quad (14)$$

Значение ЭДС не зависит от частоты, положим, что $\dot{E}(\omega) = 1$ В, для выполнения математического моделирования тока $\dot{I}(\omega)$, симулирующего численные измерения, зададим определенные номинальные значения компонентов: $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $L_1 = 4$ Гн и $L_2 = 5$ Гн.

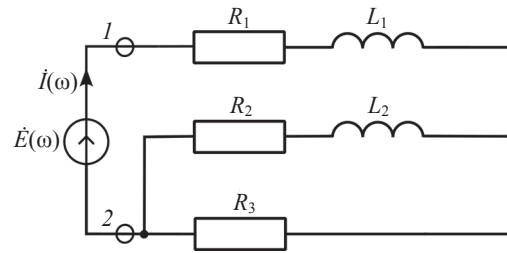


Рис. 2. Исследуемая схема

Fig. 2. The scheme under study

При выборе номинальных значений параметров компонентов будем руководствоваться при решении соображениями получения относительно компактных форм выражений. С помощью моделирования вычислим численные значения тока $\dot{I}(\omega)$, заменяющие измерения, и методом Горнера [19, 20] синтезируем интерполяционный полином:

$$\dot{E}(\omega) \dot{I}^*(\omega) = 55 - 255j\omega - 300\omega^2 + 100j\omega^3. \quad (15)$$

Используя полученные выражения (14) и (15), на основании сформулированной и доказанной теоремы и следствия 1, синтезируем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 x_5^2 = 100 \\ x_1 x_5^2 + x_3 x_5^2 + 2x_2 x_4 x_5 + 2x_3 x_4 x_5 = 300 \\ x_2^2 x_4 + 2x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_4 + 2x_1 x_2 x_5 + 2x_1 x_3 x_5 + \\ + 2x_2 x_3 x_5 + x_3^2 x_5 = 255 \\ x_1 x_5^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 = 55 \end{array} \right. . \quad (16)$$

Очевидно, что при общем числе неизвестных — 5, число уравнений четыре, так как для (16) $\text{card}(\Omega) = 4$. Следовательно, уравнений для решения задачи недостаточно. Синтезируем дополнительные к (16) уравнения на основании вычисления производных от комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$ по круговой частоте ω . Из полученных производных выберем ту, которая позволяет получить недостающее уравнение в более компактной форме. Производная от комплексного сопротивления $Z(\omega)$ позволяет получить 5 дополнительных уравнений, производная от проводимости $Y(\omega)$ — 7 дополнительных уравнений. Отметим, что наиболее простая форма дополнительного уравнения получена для $Z(\omega)$, поэтому и уравнения будем синтезировать на основе $Z'(\omega)$:

$$Z'(\omega) = \frac{j(x_2^2 x_4 + 2x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_4 + x_2^2 x_5) - 2\omega(x_2 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5) - j\omega^2(x_4 x_5^2)}{(x_2 + x_3 + j\omega x_5)^2}. \quad (17)$$

Запишем выражение для полинома (17), используя уравнения (11):

¹ Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/> (дата обращения: 03.11.2024).

$$\begin{aligned}
& j(x_2^4 x_4 + 4x_2^3 x_3 x_4 + 6x_2^2 x_3^2 x_4 + 4x_2 x_3^3 x_4 + x_3^4 x_4 + \\
& \quad x_2^2 x_3^2 x_5 + 2x_2 x_3^3 x_5 + x_3^4 x_5) - \\
& \quad - \omega(4x_2^3 x_4 x_5 + 12x_2^2 x_3 x_4 x_5 + 12x_2 x_3^2 x_4 x_5 + \\
& \quad \quad + 4x_3^3 x_4 x_5 + 2x_2 x_3^2 x_5^2 + 2x_3^3 x_5^2) - \\
& \quad - j\omega^2(6x_2^2 x_4 x_5^2 + 12x_2 x_3 x_4 x_5^2 + 6x_3^2 x_4 x_5^2 + x_3^2 x_5^3) + \\
& \quad + \omega^3(4x_2 x_4 x_5^3 + 4x_3 x_4 x_5^3) + j\omega^4 x_4 x_5^4 = \\
& \quad = (\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{I}^2(\omega)
\end{aligned} \quad (18)$$

Для (18) число $\text{card}(\Omega) = 5$, что позволяет получить 5 дополнительных уравнений к полученным ранее четырем уравнениям (16). Вычислим интерполяционный полином пятой степени для правой части (18):

$$\begin{aligned}
& (\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{I}^2(\omega) = \\
& = 3625i - 12\,250\omega - 16\,125j\omega^2 + \\
& \quad + 10\,000\omega^3 + 2500j\omega^4
\end{aligned} \quad (19)$$

Используя (18), (19), запишем 5 дополнительных к (16) уравнений:

$$\begin{cases}
x_2^4 x_4 + 4x_2^3 x_3 x_4 + 6x_2^2 x_3^2 x_4 + 4x_2 x_3^3 x_4 + x_3^4 x_4 + \\
\quad + x_2^2 x_3^2 x_5 + 2x_2 x_3^3 x_5 + x_3^4 x_5 = 3625 \\
4x_2^3 x_4 x_5 + 12x_2^2 x_3 x_4 x_5 + 12x_2 x_3^2 x_4 x_5 + 4x_3^3 x_4 x_5 + \\
\quad + 2x_2 x_3^2 x_5^2 + 2x_3^3 x_5^2 = 12\,250 \\
6x_2^2 x_4 x_5^2 + 12x_2 x_3 x_4 x_5^2 + 6x_3^2 x_4 x_5^2 + x_3^2 x_5^3 = 16\,125 \\
4x_2 x_4 x_5^3 + 4x_3 x_4 x_5^3 = 10\,000 \\
x_4 x_5^4 = 2500
\end{cases} \quad (20)$$

Теперь, имея достаточное число уравнений (16) и (20), можно найти решение поставленной задачи. Для решения будем использовать все уравнения из системы (16) и самое простое (нижнее) из системы (20).

В результате вычислений получаем 11 групп корней, исключив посторонние на основании условия $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0$, $k = \overline{1, K}$, получим искомое решение: $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5\}$.

Обсуждение

Анализ текущего состояния проблемы идентификации параметров линейных электрических цепей показывает, что с одной стороны результаты исследований востребованы в значительном числе практических приложений, а с другой стороны, что теория и практика идентификации параметров линейных электрических цепей разработана недостаточно. Преимущественно исследования сводятся к идентификации импульсной характеристики и/или передаточной функции, а задачи идентификации параметров линейных электрических цепей обычно ограничиваются идентификацией пары последовательно или параллельно соединенных линейных компонентов или Т- и П-образными четырех-

полносниками, идентификация параметров которых происходит за счет исследования схемы в режиме короткого замыкания и холостого хода. Имеется несколько частных решений задачи идентификации параметров на одной частоте, например, в работе [1]. В настоящей работе изложена часть исследований, производимых авторами, отличающаяся от известных как принципом синтеза основных уравнений, на основе полиномов комплексной мощности, так и предлагаемым методом синтеза дополнительных уравнений за счет вычисления производных от комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$ по частоте. Следует отметить, что сама идея вычисления производных по частоте от $Z(\omega)$ и $Y(\omega)$ является новой и в известных работах не обнаружена, при этом исследование таких производных показывает значительные перспективы в решении задач идентификации параметров. Разработанные методы идентификации, могут быть использованы не только в электротехнике, но, например, в задачах идентификации параметров систем автоматического управления, а доказанная теорема способствует развитию алгебры многочленов. В качестве развития методов предполагается в дальнейшем провести следующие исследования: обусловленности уравнений и устойчивости решения в зависимости от возмущения входных данных; выявление и систематизация топологических признаков схем, приводящих к вырожденным уравнениям; проведение натуральных экспериментов.

Заключение

В работе предложены методы синтеза основных и дополнительных уравнений для идентификации параметров линейных электрических двухполусников. В ходе исследований сформулирована и доказана теорема о верхней границе числа независимых уравнений. Разработан метод синтеза уравнений на основании разностей комплексной мощности, полученной в результате аналитического расчета и в результате приборных измерений. Разработан метод синтеза дополнительных уравнений за счет дифференцирования по частоте комплексных сопротивления $Z(\omega)$ и проводимости $Y(\omega)$.

Разработанные методы позволяют получить относительно простые формы уравнений, причем такие формы можно синтезировать заранее для наиболее распространенных типовых схем, что удобно, например, в случае массовых измерений.

Теоретические исследования снабжены практическим примером, демонстрирующим способ применения теории в решении практических задач.

Предложенные методы способствуют развитию теоретической электротехники, радиотехники, теории автоматического управления и могут быть математической основой построения приборов идентификации параметров линейных электрических цепей.

Литература

References

1. Коровкин Н.В., Миневи́ч Т.Г., Соловьёва Е.Б. Определение электромагнитных параметров группы датчиков, предназначенных для измерений в активных средах или труднодоступных частях устройств и сооружений // *Электротехника*. 2023. № 3. С. 40–44. https://doi.org/10.53891/00135860_2023_3_40
2. Зуев А.Л., Мишланов В.Ю., Судаков А.И., Шакиров Н.В., Фролов А.В. Эквивалентные электрические модели биологических объектов // *Российский журнал биомеханики*. 2012. Т. 16. № 1. С. 110–120.
3. Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю. Определение параметров элементов линейного N-полюсника по входным частотным характеристикам // *Электротехника*. 2024. № 6. С. 48–57. <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2024-6-48-57>
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т. 1. СПб: Питер, 2006. 463 с.
5. Гридин В.Н., Анисимов В.И., Алмаасали С.А. Применение метода диакоптики для моделирования и расчета больших систем // *Проблемы управления*. 2014. № 4. С. 9–13.
6. Герасимов И.В., Кузьмин С.А., Лозовой Л.Н., Никитин А.В. Основания технологии комплементарного проектирования наукоемких изделий. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ» 2010. 196 с.
7. Гришенцев А.Ю., Гурьянов А.В., Кузнецова О.В., Шукалов А.В., Коробейников А.Г. Математическое обеспечение в системах автоматизированного проектирования. СПб.: Университет ИТМО, 2017. 88 с.
8. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972. 544 с.
9. Бутырин П.А., Гришкевич А.А. Минимальные структуры математических моделей электрических цепей // *Электротехника*. 1992. № 2. С. 11–21.
10. Бутырин П.А., Васильковская Т.А. Принципы декомпозиции сложных электрических цепей при их диагностике по частям // *Электротехника*. 2001. № 6. С. 41–48.
11. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // *Электротехника*. 2005. № 1. С. 45–60.
12. Tang R., Zhu W., He Y. Research on anomaly identification of PV power station operation data based on fuzzy association rules // *IEEE Access*. 2024. V. 12. P. 156662–156672. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3485082>
13. Uyanik I., Saranlı U., Ankaralı M.M., Cowan N.J., Morgül Ö. Frequency-Domain subspace identification of Linear Time-Periodic (LTP) systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2019. V. 64. N 6. P. 2529–2536. <https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2867360>
14. Tachibana H., Tanaka N., Maeda Y., Iwasaki M. Comparisons of Frequency Response Function identification methods using single motion data: time- and frequency-domain approaches // *Proc. of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*. 2019. P. 498–503. <https://doi.org/10.1109/ICMECH.2019.8722867>
15. Teplov A., Petlenkov E., Belikov J. Grey box identification of fractional-order system models from frequency domain data // *Proc. of the 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. 2018. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/TSP.2018.8441247>
16. Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю., Миневи́ч Т.Г. Исследование обусловленности задачи определения параметров линейного N-полюсника по входным частотным характеристикам // *Журнал радиоэлектроники*. 2024. № 10. С. 16. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.12>
17. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
18. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
19. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1969. 664 с.
20. Волков Е.А. Вычисление значений многочлена. М.: Наука, 1987. 248 с.
21. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
22. Ильин В.А., Позднык Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Физматлит, 2001. 464 с.
1. Korovkin N.V., Minevich T.G., Solovyeva E.B. Determining the electromagnetic parameters of a group of sensors intended for measuring in reactive media or in hard-to-reach parts of equipment. *Russian Electrical Engineering*, 2023, vol. 94, no. 3, pp. 181–185. <https://doi.org/10.3103/S1068371223030070>
2. Zuev A.L., Mishlanov V.Y., Sudakov A.I., Shakirov N.V., Frolov A.V. Equivalent electrical models of biological objects. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, no. 1 (55), pp. 98–107.
3. Korovkin N.V., Grishentsev A.Yu. Determination of the parameters of a linear N-Pole's elements from the input frequency responses. *Elektrichestvo*, 2024, no. 6, pp. 48–57. (in Russian). <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2024-6-48-57>
4. Demirchian K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. *Theoretical Foundations of Electrical Engineering*. vol. 1. St. Petersburg, Piter Publ., 2006, 463 p. (in Russian)
5. Gridin V.N., Anisimov V.I., Almaasali S.A. Application of diakoptics method for modeling and calculation of large systems. *Control Sciences*, 2014, no. 4, pp. 9–13. (in Russian)
6. Gerasimov I.V., Kuz'min S.A., Lozovoj L.N., Nikitin A.V. *Fundamentals of Technology for Complementary Design of High-Tech Products*. St. Petersburg, ETU «LETI» Publ., 2010, 196 p. (in Russian)
7. Grishentsev A.Iu., Gurianov A.V., Kuznetsova O.V., Shukalov A.V., Korobeinikov A.G. *Mathematical Support in Computer-Aided Design Systems*. St. Petersburg, ITMO University, 2017, 88 p. (in Russian)
8. Kron G. Diakoptics: The Piecewise Solution of Large-Scale Systems. Macdonald, 1963, 166 p.
9. Butyrin P.A., Grishkevich A.A. Minimal structures of mathematical models of electrical circuits. *Elektrichestvo*, 1992, no. 2, pp. 11–21. (in Russian)
10. Butyrin P.A., Vas'kovskaya T.A. Decomposition principles for the complex electric circuits when diagnosing them by parts. *Elektrichestvo*, 2001, no. 6, pp. 41–48. (in Russian)
11. Kurganov S.A., Filaretov V.V. An implicit superposition principle for actions in linear electric circuits. *Elektrichestvo*, 2005, no. 1, pp. 32–43. (in Russian)
12. Tang R., Zhu W., He Y. Research on anomaly identification of PV power station operation data based on fuzzy association rules. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 156662–156672. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3485082>
13. Uyanik I., Saranlı U., Ankaralı M.M., Cowan N.J., Morgül Ö. Frequency-Domain subspace identification of Linear Time-Periodic (LTP) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, vol. 64, no. 6, pp. 2529–2536. <https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2867360>
14. Tachibana H., Tanaka N., Maeda Y., Iwasaki M. Comparisons of Frequency Response Function identification methods using single motion data: time- and frequency-domain approaches. *Proc. of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, 2019, pp. 498–503. <https://doi.org/10.1109/ICMECH.2019.8722867>
15. Teplov A., Petlenkov E., Belikov J. Grey box identification of fractional-order system models from frequency domain data. *Proc. of the 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, 2018, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/TSP.2018.8441247>
16. Korovkin N.V., Grishentsev A.Y., Minevich T.G. Investigation of the conditionality of the problem of determining the parameters of a linear N-pole by input frequency characteristics. *Journal of Radio Electronics*, 2024, no. 10, pp. 16. (in Russian). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.12>
17. Tikhonov V.I. *Statistical Radio Engineering*. Moscow, Radio i svjaz', 1982, 624 p. (in Russian)
18. Levin B.R. *Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering*. Moscow, Radio i svjaz', 1989, 656 p. (in Russian)
19. Demidovich B.P., Maron I.A. *Basics of Computational Mathematics*. Moscow, Nauka, 1969, 664 p. (in Russian)
20. Volkov E.A. *Calculating the Values of a Polynomial*. Moscow, Nauka, 1987, 248 p. (in Russian)
21. Doetsch G. *Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. R. Oldenbourg, 1967, 256 p. (in German)
22. Il'in V.A., Pozdnyak E.G. *Basics of Mathematical Analysis. Part 2*. Moscow, Fizmatlit, 2001, 464 p. (in Russian)

Авторы

Коровкин Николай Владимирович — доктор технических наук, профессор, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация,  6601971248, <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>, Nikolay.Korovkin@gmail.com

Гришенцев Алексей Юрьевич — доктор технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация,  56321138400, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, AGrishentsev@yandex.ru

Authors

Nikolay V. Korovkin — D.Sc., Full Professor, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation,  6601971248, <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>, Nikolay.Korovkin@gmail.com

Alexey Yu. Grishentsev — D.Sc., Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation,  56321138400, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, AGrishentsev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 13.10.2024
Одобрена после рецензирования 21.01.2025
Принята к печати 27.03.2025

Received 13.10.2024
Approved after reviewing 21.01.2025
Accepted 27.03.2025



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»