

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-943-951

УДК 621.923.74+004.942

Математическая модель движения сферического ротора в процессе доводки чашечными притирами со свободным абразивом

Сергей Николаевич Федорович✉

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург, 197046, Российская Федерация
fedorovichsn@gmail.com✉, <https://orcid.org/0009-0001-3147-9910>

Аннотация

Введение. В связи с повышением требований к эксплуатационным характеристикам гироскопов с электростатическим неконтактным подвесом ротора возникает необходимость улучшения технологии производства деталей и сборки приборов. Важнейшим компонентом чувствительного элемента электростатического гироскопа является сферический ротор из бериллия. Возмущающие моменты от сил подвеса пропорциональны напряжению, подаваемому на электроды, и отклонению поверхности ротора от сферической формы. По этой причине технология финишной обработки поверхности ротора должна обеспечивать выполнение высоких требований к сферичности ротора. При изготовлении роторов всех известных типов электростатических гироскопов применяется технология бесцентровой доводки чашечными притирами со свободным абразивом. Одним из ключевых факторов, влияющих на получаемую сферичность, являются параметры движения ротора в доводочном станке. Представлена математическая модель, позволяющая определить параметры движения ротора в станке доводки под действием сил трения от вращения чашечных притиров. **Метод.** Процесс бесцентровой доводки чашечными притирами рассматривается как разновидность фрикционного привода. Движение ротора рассматривается как движение абсолютно твердого тела. Для определения параметров движения используются дифференциальные уравнения Эйлера для вращательного движения, решение которых осуществляется численно с использованием программного пакета MATLAB. Распределение давлений в парах притир-ротор рассматривается по аналогии взаимодействий в шаровом шарнире. **Основные результаты.** Показано, что математическая модель движения ротора в процессе доводки чашечными притирами помогает обнаружить основные закономерности движения ротора при бесцентровой доводке и определить граничные условия, при которых должна осуществляться обработка. Предложенная модель позволяет выявить влияние разности в моментах инерции ротора на его движение при обработке, в частности при полировке. **Обсуждение.** Разработанная модель движения ротора может быть использована при проектировании алгоритмов и систем управления станками бесцентровой доводки сфер свободным абразивом, а также в качестве составной части математических и физических моделей, описывающих обработку поверхности ротора методом доводки чашечными притирами.

Ключевые слова

электростатический гироскоп, сферическая доводка, сферический ротор, чашечные притиры, бесцентровая доводка, движение твердого тела

Ссылка для цитирования: Федорович С.Н. Математическая модель движения сферического ротора в процессе доводки чашечными притирами со свободным абразивом // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 5. С. 943–951. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-943-951

Mathematical model of the motion of a spherical rotor during finishing with cup laps and free abrasive

Sergei N. Fedorovich✉

JSC Concern CSRI Elektropribor, Saint Petersburg, 197046, Russian Federation

fedorovichsn@gmail.com✉, <https://orcid.org/0009-0001-3147-9910>

Abstract

Due to the increasing requirements for the performance characteristics of gyroscopes with electrostatic non-contact rotor suspension, there is a need to improve the technology for manufacturing parts and assembling devices. The most important component of the sensitive element of an electrostatic gyroscope is a spherical beryllium rotor. The disturbing moments from the suspension forces are proportional to the voltage supplied to the electrodes and the deviation of the rotor surface from the spherical shape. For this reason, the technology of finishing the rotor surface must ensure that high requirements for the sphericity of the rotor are met. In the manufacture of rotors of all known types of electrostatic gyroscopes, the technology of centerless finishing with cup laps with free abrasive is used. One of the key factors influencing the resulting sphericity is the parameters of the rotor motion in the finishing machine. The article presents a mathematical model that allows one to determine the parameters of the rotor motion in the finishing machine under the action of friction forces from the rotation of the cup laps. The method of mathematical modeling was used in the work. The process of centerless finishing with cup laps is considered as a type of friction drive. The rotor motion is considered as the motion of an absolutely rigid body. To determine the motion parameters, the Euler differential equations for rotational motion are used the solution of which is carried out numerically using the MATLAB software package. The pressure distribution in the lap-rotor pairs is considered by analogy with the expression of effects in a ball joint. The result of the work is a mathematical model of the rotor motion during finishing with cup laps, which made it possible to identify the main patterns of rotor motion during centerless finishing. The model made it possible to reveal that the difference in the moments of inertia of the rotor can have a significant effect on the rotor motion during processing, in particular, during polishing. Boundary conditions were determined under which the rotor motion can be permissibly considered as the motion of a ball with equal moments of inertia. The proposed model of rotor motion can be used in designing algorithms and control systems for machines for centerless finishing of spheres with free abrasive as well as a component of mathematical and physical models describing the processing of the rotor surface by finishing with cup laps.

Keywords

electrostatic gyroscope, centerless finishing, spherical rotor, lap polishing, motion dynamics

For citation: Fedorovich S.N. Mathematical model of the motion of a spherical rotor during finishing with cup laps and free abrasive. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 5, pp. 943–951 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-943-951

Введение

Важнейшим компонентом чувствительного элемента электростатического гироскопа (ЭСГ) является ротор из бериллия [1]. Форма ротора в эксплуатационном состоянии должна быть максимально приближена к сферической, поскольку возмущающие моменты от сил электростатического подвеса ротора пропорциональны напряжению, подаваемому на электроды подвеса и отклонению поверхности ротора от идеальной сферической формы [2]. По этой причине технология финишной обработки поверхности ротора должна обеспечивать выполнение высоких требований сферичности ротора. Для финишной обработки роторов используется технология сферической доводки чашечными притирами со свободным абразивом [3]. Данная технология применяется при изготовлении роторов всех известных типов ЭСГ [4, 5] и в иных проектах, где требуется достижение высокой степени сферичности [6]. При таком виде обработки ротор не имеет жесткой фиксации. Ротор устанавливается в точку пересечения осей и поджимается чашами притиров, тем самым ограничиваются только поступательные степени свободы. При вращении притиров ротор начинает вращаться под действием момента трения, вызванного совместным действием всех притиров. Направление вращения притиров циклично изменяется по заданному алгоритму, обеспе-

чивая изменение положения оси вращения ротора для исключения образования повторяющихся паттернов обработки на роторе и его более равномерной обработки.

Ключевой особенностью процесса сферической доводки является механизм движения обрабатываемой детали — сферического ротора. Силовое взаимодействие между поверхностями притиров и ротора, которое возникает при их относительном движении, порождают силу сопротивления, которая является движущей силой для ротора [7]. Трение притиров о ротор одновременно выступает в роли механизма движения ротора и его абразивной обработки. Таким образом, скорость, ускорение и направление движения, а также и формообразование ротора зависят от параметров движения притиров и их давления на ротор. Существующие современные теоретические концепции абразивной доводки неприемлемы для решения конкретных практических задач, таких как доводка роторов ЭСГ, из-за уникальных особенностей этого процесса [8, 9].

Целью исследования является создание математической модели движения ротора в станке сферической доводки, для последующего применения при проектировании алгоритмов и систем управления станками бесцентровой доводки сфер свободным абразивом. Разработка модели может облегчить исследование процесса сферической доводки и сократить количество проводимых экспериментов.

Математическая модель движения ротора при сферической доводке

Механизм движения ротора в притирах можно представить как одну из разновидностей фрикционного привода. В данном случае притиры выполняют роль фрикционов, а сферический ротор является ведомым элементом. Рассмотрим движение ротора на примере доводочного станка, представленного на рис. 1, а.

Доводочный станок оснащен четырьмя серводвигателями, расположенными в вершинах тетраэдра — A, B, C, D .

На валу каждого серводвигателя находится аксиально подвижные выдвижные штоки, на которых расположены муфты 2, в которые установлены притиры 3. Оси валов пересекаются в центре тетраэдра. Выходные валы трех нижних сервоприводов размещены через 120° друг от друга при просмотре сверху вниз и наклонены под углом $19^\circ 28' 12''$ ниже плоскости горизонта. Вал верхнего серводвигателя направлен вниз в точку пересечения трех нижних валов. Чтобы ротор находился в центре тетраэдра, аксиальные силы от притиров должны быть сбалансированы. Это обеспечивается пружинами 1, которыми притиры 3 поджимаются к ротору. Подвижные муфты 2 позволяют минимизировать поперечные силы, вызванные погрешностями при изготовлении элементов станка и неидеальной сбалансированностью аксиальных сил притиров.

В силу симметрии векторная сумма равных по модулю сил F , действующих по оси любого из притиров, будет уравниваться аксиальными силами оставшихся трех притиров. Весом бериллиевого ротора можно пренебречь, поскольку на практике он существенно меньше сил F — вес самого тяжелого ротора ЭСГ составляет не более 15 г.

Допустим, что ротор находится в центре тетраэдра и в процессе обработки центр ротора остается неподвижным. На практике обеспечение этого условия определяется качеством изготовления деталей станка и его

конструкцией. Предположим, что притиры и ротор идеально приработаны и поверхность контакта идеализированно представима как поверхность шарового слоя.

Введем условно неподвижную декартову систему координат $Oxyz$, связанную со станиной станка. Начало неподвижной системы координат поместим в точку O пересечения осей притиров A, B, C, D (рис. 1, б). Введем подвижные координаты, связанные с каждым из притиров $Ol_kl_{k2}l_{k3}$, с началом в точке O , индекс k — обозначение притира (A, B, C или D). Оси l_{k3} направим по оси вращения каждого из притиров.

Определим связь систем координат $Oxyz$ и $Ol_kl_{k2}l_{k3}$ с помощью углов Эйлера [10], используя последовательность поворотов z, y_1, z_2 (рис. 2). В соответствии с кинематикой станка, притиры имеют поступательную и вращательную степени свободы. В рабочем положении, когда притиры подведены к ротору, поступательная степень свободы теряется — силы поджатия компенсируют друг друга, поскольку векторная сумма аксиальных сил по условию равна нулю. Таким образом, для каждого притира остается одна вращательная степень свободы вокруг оси l_{k3} .

Используя компактную запись $c_\alpha = \cos \alpha$, $s_\alpha = \sin \alpha$ и т. д., определим матрицу перехода:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_{z2}(\gamma)\mathbf{R}_{y1}(\beta)\mathbf{R}_z(\alpha) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha c_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ -c_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\alpha & c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ c_\gamma s_\beta & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}, \quad (1) \end{aligned}$$

где α, β и γ — углы прецессии, нутации и собственного вращения притира.

В системе координат $Oxyz$ углы α и β для каждого притира определены конструкцией станка (табл. 1), которые устанавливают положение оси вращения притира, а угол γ — разворот притира вокруг его собственной оси. Подставляя значения углов в уравнение (1), полу-

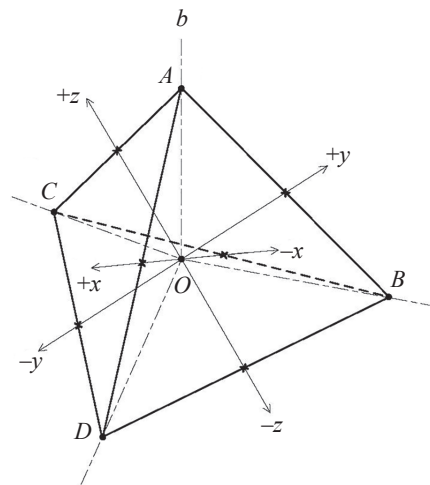
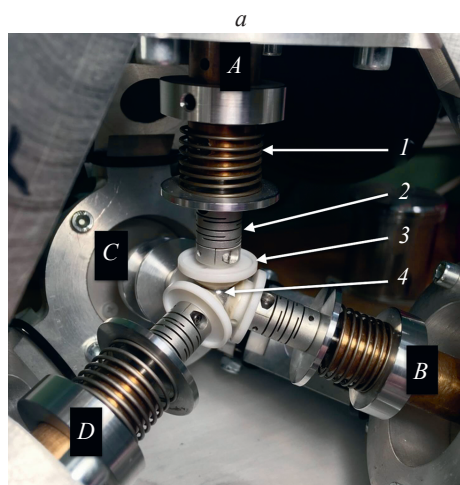


Рис. 1. Доводочный станок (а) и схема расположения осей притиров (б).

A, B, C, D — вершины тетраэдра с четырьмя серводвигателями; 1 — пружина; 2 — муфта; 3 — притиры; 4 — бериллиевый ротор

Fig. 1. Finishing machine (a) and lapping axes arrangement diagram (b).

A, B, C, D — vertices of a tetrahedron with four servomotors; 1 — spring; 2 — clutch; 3 — lapping; 4 — beryllium rotor

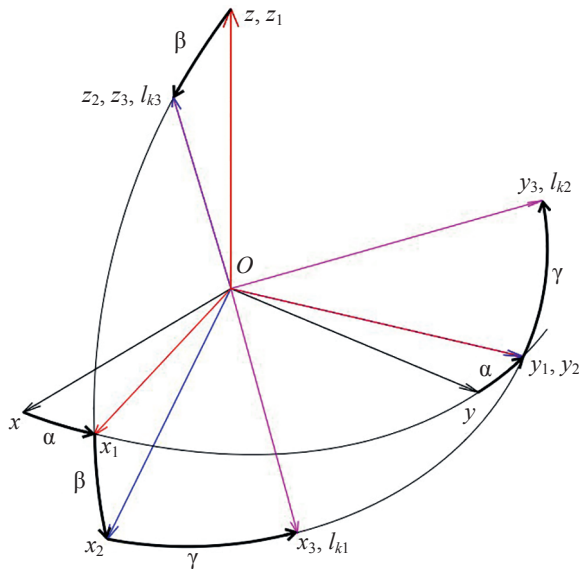


Рис. 2. Последовательность поворотов z, y_1, z_2

Fig. 2. Sequence of rotations z, y_1, z_2

чим матрицу перехода из системы координат притира $Ol_{k1}l_{k2}l_{k3}$ в систему координат станка $Oxyz$.

Рассмотрим вектор $\mathbf{v}$ в неподвижных координатах $Oxyz$. Если $\mathbf{v}'$ является одним и тем же вектором в подвижных координатах $Ol_{k1}l_{k2}l_{k3}$ то переход осуществляется как:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{v}. \quad (2)$$

Обратный переход выполняется следующим образом:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)^T \mathbf{v}'. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) определяют связь систем координат притиров $Ol_{k1}l_{k2}l_{k3}$ с системой координат станка $Oxyz$. Заметим, что кинематическая связь в станке подразумевает лишь изменение угла γ при вращении притиров, а углы α, β определяют расположение осей притиров для конкретного станка. При этом положительное приращение угла γ в (2) определяет вращение притира по часовой стрелке при наблюдении из точки O в неподвижных координатах.

Перейдем к рассмотрению кинематической связи станка с ротором. Введем подвижную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$, связанную с ротором, начало

которой совпадает с его центром. Поскольку центр ротора расположен в точке пересечения осей притиров, то начало подвижной и неподвижной систем координат также совпадают. Ось ζ направим по оси с наибольшим моментом инерции ротора, а оси ξ, η произвольным образом, поскольку ротор симметричен относительно оси с наибольшим моментом инерции. Определим связь систем координат $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ используя параметры Гамильтона и матрицу поворота ось-угол [11]. По условию, ротор обладает тремя вращательными степенями свободы и приводится в движение силами трения притиров, вращаясь при этом с мгновенной угловой скоростью ω . Для задания оси поворота используем единичный направляющий вектор $\mathbf{n}$ угловой скорости ротора, который определим в виде:

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}.$$

Угол, на который поворачивается ротор за малое время Δt вращаясь с мгновенной угловой скоростью ω , имеет вид:

$$\lambda = \int_t^{t+\Delta t} \omega(t) dt. \quad (4)$$

Кватернион $\mathbf{q}$, при вращении ротора вокруг $\mathbf{n}$, рассчитаем по формуле

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}, \lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda/2) \\ \mathbf{n} \sin(\lambda/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda/2) \\ n_x \sin(\lambda/2) \\ n_y \sin(\lambda/2) \\ n_z \sin(\lambda/2) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Соответствующую матрицу поворота ось-угол запишем так

$$\mathbf{R}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — соответствующие элементы кватерниона (6).

Вычисляя угол поворота по уравнению (4) и подставляя (5) в (6), получим матрицу преобразования координат. Рассмотрим вектор $\mathbf{v}$ в неподвижных координатах $Oxyz$. Если $\mathbf{v}'$ является одним и тем же вектором в подвижных координатах $O\xi\eta\zeta$, то переход между координатами при повороте ротора на угол λ выражается как:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}_q(\mathbf{q}(\mathbf{n}, \lambda))\mathbf{v}; \quad (7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}_q(\mathbf{q}(\mathbf{n}, \lambda))^T \mathbf{v}'. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) определяют связь подвижной и неподвижной систем координат. Заметим, что выражения (4)–(8) применимы для численного решения уравнений движения ротора, в котором поворот ротора на малый угол λ осуществляется для каждого интервала времени Δt .

После того, как кинематические связи станка определены, перейдем к определению сил трения — дви-

Таблица 1. Углы α и β расположения осей притиров в системе координат $Oxyz$

Table 1. Angles α and β location of the lapping axes in the coordinate system $Oxyz$

Притир	α	β
A	45°	54°42'0"
B	135°	125°18'0"
C	225°	54°42'0"
D	315°	124°18'0"

жущих сил в рассматриваемой системе. Рассмотрим моменты сил трения, которые действуют в области контакта между притиром и ротором. На рис. 3 изображено давление притира на ротор с силой F в системе координат $Ol_1l_2l_3$ и связанной с ней сферической системой r, θ, φ , в которой r — радиус-вектор до рассматриваемой точки, θ — зенитный угол (угол между осью l_3 и радиус-вектором), φ — азимутальный угол (угол между осью l_1 и проекцией радиуса-вектора на плоскость Ol_1l_2).

Разделим поверхность ротора на малые элементы с площадью dS . Исходя из обозначений (рис. 3) элемент площади поверхности ротора с радиусом r может быть записан в виде:

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

В области контакта на каждый элемент площади приходится давление p со стороны притира. Сила трения f , при относительном перемещении притира и ротора, на каждой площадке dS может быть вычислена как:

$$f(\theta) = \mu p(\theta) dS, \quad (9)$$

где μ — коэффициент трения скольжения; $p(\theta)$ — давление, приходящееся на элемент площади ротора.

Рассмотрим силу трения, в первом приближении, независимо от скорости относительного движения [12]. В действительности трение является многофакторным процессом и, безусловно, коэффициент трения нелинейно зависит от скорости [13]. Распределение давления $p(\theta)$ в контактной паре рассмотрим по аналогии выражения воздействий в шаровом шарнире — по синусоидальному закону [14]. Поверхности при этом

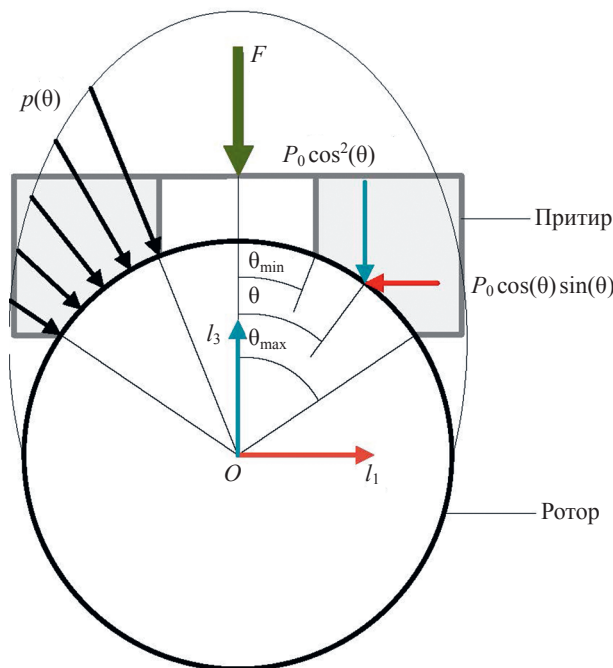


Рис. 3. Распределение давления притира на поверхности ротора

Fig. 3. Distribution of lapping pressure on the rotor surface

предполагаются идеальными, с положительным радиальным зазором во внутренней сфере притира, поскольку в паре имеется прослойка абразивной суспензии. В соответствии с синусоидальным распределением давления имеем:

$$p(\theta) = P_0 \cos(\theta), \quad (10)$$

где P_0 — предельно возможное давление.

По условию, приложенная к притиру сила F уравновешена, а значит, равна интегральной сумме сил реакции, действующих вдоль оси приложения силы. Разделим давление на две составляющие — продольную $P_0 \cos^2\theta$ и поперечную $P_0 \cos\theta \sin\theta$ оси притира. Условие равновесия сил для области контакта может быть записано как:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} P_0 \cos^2(\theta) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (11)$$

Интегрируя (11), получим:

$$F = 2\pi r^2 P_0 \left(\frac{\cos^3(\theta_{\min}) - \cos^3(\theta_{\max})}{3} \right). \quad (12)$$

Выражая P_0 из уравнения (12) и подставляя в (10), и затем в (9), получим выражение для силы трения, действующей на каждую элементарную площадку dS :

$$f(\theta) = \frac{3\mu F \cos(\theta)}{2\pi r^2} \frac{dS}{\cos^3(\theta_{\min}) - \cos^3(\theta_{\max})}. \quad (13)$$

Уравнение (13) определяет величину силы трения, при этом ее направление соответствует направлению скорости относительного движения ω_{rel} поверхностей притира и ротора. Поверхности контакта $\mathbf{r}$, в соответствии с принятыми допущениями, можно представить как сегмент сферы. В соответствии с обозначениями (рис. 3) в векторном представлении имеем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{i} + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \mathbf{j} + r \cos(\theta) \mathbf{k},$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}],$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — базисные векторы системы координат $Ol_1l_2l_3$, связанной с притиром.

Линейные скорости относительного движения на каждом элементе поверхности определяются векторным произведением относительной угловой скорости на радиус-вектор:

$$\mathbf{v} = \omega_{rel} \times \mathbf{r}.$$

Поставив в соответствие каждому элементу dS вектор относительной скорости, получим векторное поле скоростей относительного движения поверхностей. Относительную скорость движения поверхностей можно приближенно считать скоростью движения абразива, которым обрабатывается ротор. Векторы относительной скорости, коллинеарные силе трения, действующей на ротор, могут быть использованы как направляющие векторы для сил трения:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} f(\theta).$$

Момент, создаваемый силами $\mathbf{f}$, вычисляется относительно неподвижной точки O по формуле

$$\mathbf{M}_k = \iint_S \left(\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{f}}{dS} \right) dS. \quad (14)$$

Интегрируя векторное произведение (14) по поверхности контакта, получим момент силы, действующий со стороны притира с индексом k в системе координат $Ol_kl_{k2}l_{k3}$. Определим суммарный крутящий момент действующий на ротор. Для этого осуществим переход из $Ol_kl_{k2}l_{k3}$ в $Oxyz$ и просуммируем векторы крутящего момента каждого из четырех притиров:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^4 \mathbf{R}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T \mathbf{M}_k. \quad (15)$$

Запишем систему динамических уравнений Эйлера применительно к ротору, на который действует внешний крутящий момент $\mathbf{M}'$ в системе координат, связанной с ротором $O\xi\eta\zeta$:

$$\begin{cases} I_\xi \dot{\omega}_\xi + (I_\zeta - I_\eta) \omega_\eta \omega_\zeta = \mathbf{M}'_\xi \\ I_\eta \dot{\omega}_\eta + (I_\xi - I_\zeta) \omega_\xi \omega_\zeta = \mathbf{M}'_\eta \\ I_\zeta \dot{\omega}_\zeta + (I_\eta - I_\xi) \omega_\xi \omega_\eta = \mathbf{M}'_\zeta \end{cases}, \quad (16)$$

где I_ξ, I_η, I_ζ — осевые моменты инерции ротора.

Преобразование координат для вектора внешнего крутящего момента определим как:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R}_q \left(\mathbf{q} \left(\frac{\omega_i}{|\omega_i|}, \lambda \right) \right) \mathbf{M}. \quad (17)$$

Угол поворота ротора λ найдем из выражения (4) на каждом шаге Δt . Таким образом, уравнения (16) и (17) полностью определяют движение ротора при обработке чашечными притирами.

Раскрытие выражений (15)–(17) дает громоздкие системы уравнений, решение которых в аналитическом виде затруднено. По этой причине решение уравнений движения выполним численным методом простой постановки Эйлера.

Результаты моделирования

Рассмотрим результаты решений предложенной модели на примере полировки полого ротора из бериллия с наружным диаметром 50 мм притирами из фторопласта. Параметры модели выбирались исходя из режимов доводки и полировки роторов, применяемых на практике. Геометрические размеры ротора соответствуют действительным размерам ротора ЭСГ, представленным в работах [15, 16]. Ось подвижной системы координат ζ совпадает с осью симметрии ротора. Осевые моменты инерции были вычислены в программе SolidWorks.

Осуществим проверку модели движения в частном случае, для которого положение оси вращения ротора является тривиальным. Выберем режим вращения притиров таким, в котором притиры A, D вращаются по часовой стрелке, а притиры B, C в противоположном направлении. При этом притиры вращаются с одинаковыми угловыми скоростями. В силу симметрии

станка, в системе $Oxyz$ (рис. 1) результирующий момент сил трения действует по оси x . Соответственно, ротор должен раскручиваться относительно оси x . Зададим начальные условия, представленные в табл. 2.

Рассмотрим зависимость момента сил трения от времени в координатах ротора $O\xi\eta\zeta$, (рис. 4).

В течение первых 10 с система не переходит в состояние динамического равновесия, поскольку приведенный момент не равен нулю. Вместо этого наблюдается затухающий переходный процесс, вызванный неравенством главных моментов инерции ротора. Составляющие вектора угловой скорости ротора, представлены на рис. 5. Из рис. 5, b видно, что ротор, раскручиваясь вокруг оси близкой к ξ , с течением времени стремится занять положение, в котором ось вращения будет совпадать с осью наибольшего момента инерции I_ζ . Длительность переходного процесса составляет 12 с,

Таблица 2. Параметры и начальные условия модели движения ротора

Table 2. Parameters and initial conditions of the rotor motion model

Параметр	Значение
I_ξ , кг·м ²	$6,11 \times 10^{-6}$
I_η , кг·м ²	$6,11 \times 10^{-6}$
I_ζ , кг·м ²	$7,06 \times 10^{-6}$
$\theta_{\min}$, °	45
$\theta_{\max}$, °	54
μ	0,05
F , Н	3
h , с	1×10^{-3}
ω_A, ω_D , рад/с	31,4
ω_B, ω_C , рад/с	–31,4
α , °	1

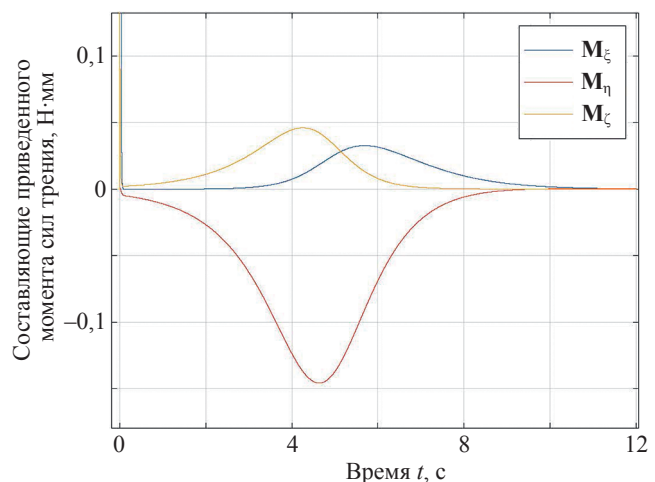


Рис. 4. Составляющие приведенного момента сил трения в системе $O\xi\eta\zeta$

Fig. 4. Components of the reduced moment of friction forces in the $O\xi\eta\zeta$ system

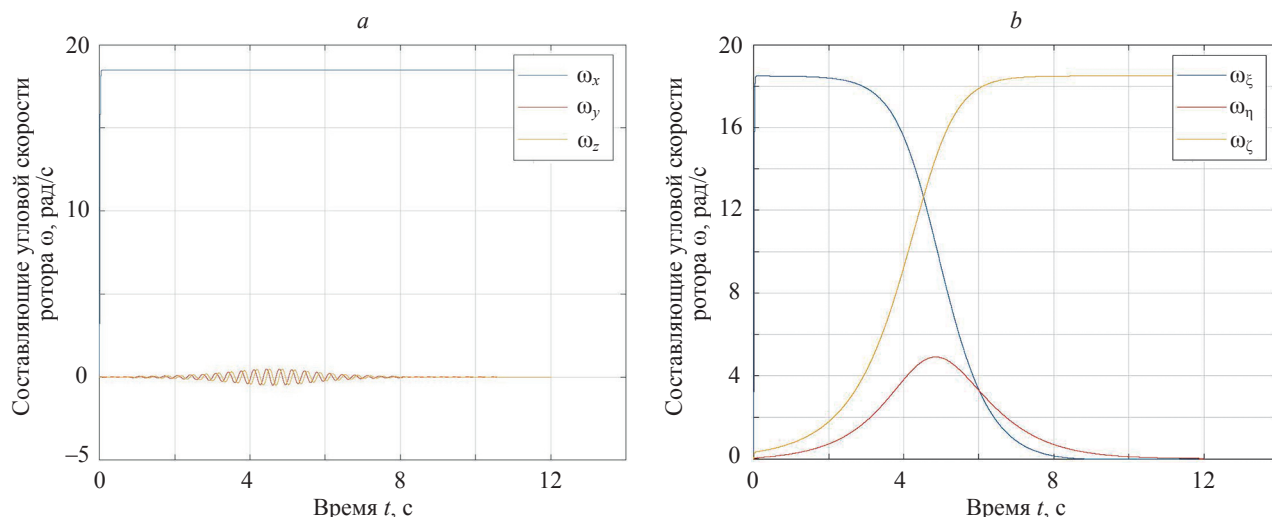


Рис. 5. Проекция угловой скорости ротора в системах: $Oxyz$ (a) и $Oxi\zeta$ (b)
 Fig. 5. Projections of the angular velocity of the rotor in the systems: $Oxyz$ (a) and $Oxi\zeta$ (b)

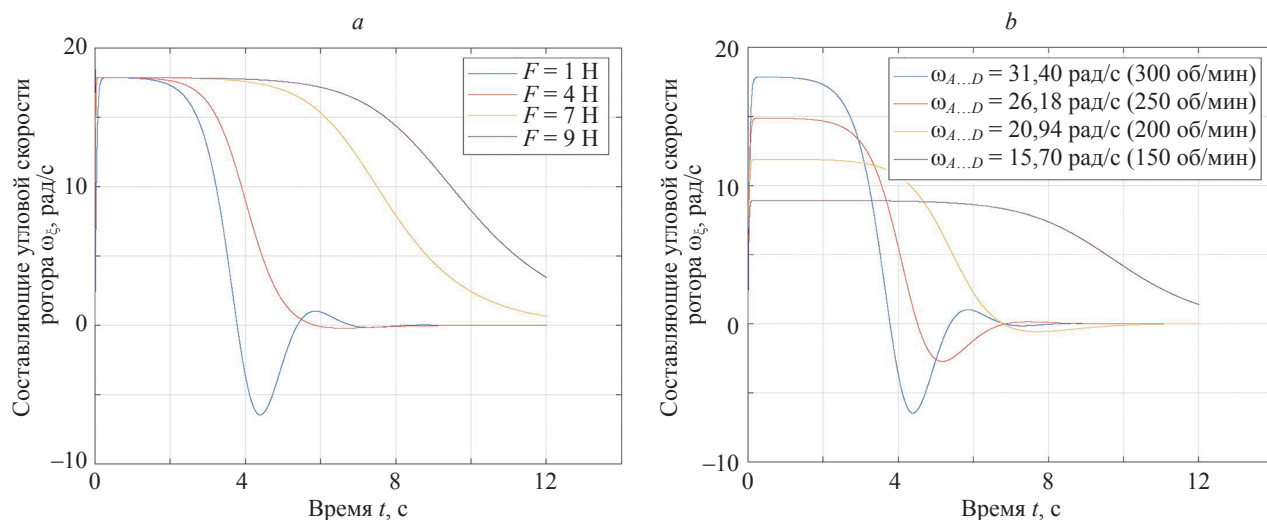


Рис. 6. Переходный процесс для различных значений: $F(\omega_{A...D} = 31,4, \mu = 0,05)$ (a); $\omega_{A...D} (F = 1, \mu = 0,05)$ (b)
 Fig. 6. Transient process for different values of: $F(\omega_{A...D} = 31,4, \mu = 0,05)$ (a); $\omega_{A...D} (F = 1, \mu = 0,05)$ (b)

по истечении которых ротор вращается вокруг оси ζ с постоянной угловой скоростью, и система переходит в состояние динамического равновесия.

Исследование влияния начальных условий показывает, что длительность переходного процесса зависит, в основном, от четырех параметров: силы прижатия притиров F , коэффициента трения μ , скорости вращения притиров $\omega_{A...D}$ и в меньшей степени от площади рабочей поверхности притиров, которая определяется углами $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$. Увеличение F или μ приводит к повышению длительности переходного процесса и степени затухания (рис. 6), на котором представлено изменение только одной составляющей ω_ξ для разных значений приложенной силы. Как видно из (рис. 6, a) увеличение силы прижатия приводит к увеличению длительности переходного процесса.

В наибольшей степени влияние разности моментов инерции ротора на его движение в станке зависит от угловой скорости чаш притиров и, соответственно,

самого ротора. Пример такой зависимости представлен на рис. 6, b.

Заключение

Представленные зависимости переходного процесса от параметров системы позволяют определить степень влияния отклонения главных моментов инерции на результирующее движение ротора. Так, для процесса полирования, в котором силы F находятся в пределах 1–9 Н и притиры вращаются с относительно высокими скоростями — в пределах 15,7–31,4 рад/с результаты моделирования показали, что для полого ротора электростатического гироскопа, отличие в главных моментах инерции оказывает существенное влияние на параметры движения ротора во время обработки — проявляется гироскопический эффект. Это приводит к тому, что в цикле обработки, при любом переключении направлений вращения притиров, в координатах

ротора ось вращения стремится выровняться с осью максимального момента инерции, что приводит к неравномерности обработки.

Для процессов доводки, в которых сила F более 9 Н или коэффициент трения более 0,3 и угловые скорости притиров достаточно низкие — до 15,7 рад/с, различие моментов инерции в первом приближении можно не учитывать, поскольку длительность переходного процесса составляет десятки секунд и более.

На основе рассмотренных зависимостей получена следующая практическая рекомендация. При полировании ротора электростатического гироскопа следует использовать скорости вращения притиров — 15 рад/с (143 об/мин) и менее, а также применять интервал между переключением направления вращения притиров не более 6 с. Указанные граничные условия позволяют

избежать появления повторяющихся паттернов выработки на поверхности ротора и повысить сферичность.

Разработанная математическая модель движения показала примечательный факт, что ни сила прижатия, ни коэффициент трения скольжения не влияют на угловую скорость ротора при наступлении динамического равновесия системы в диапазоне используемых на практике режимов обработки.

Важнейшим практическим применением представленной модели является возможность определения параметров движения ротора в сферодоводочном устройстве для конкретных рабочих условий, на основе которых появляется возможность управлять положением ротора и реализовывать систему управления станком доводки.

Литература

1. Ландау Б.Е., Белаш А.А., Гуревич С.С., Левин С.Л., Романенко С.Г., Цветков В.Н. Электростатический гироскоп в системах ориентации космических аппаратов // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 3 (114). С. 69–79. <https://doi.org/10.17285/0869-7035.0071>
2. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. Федорович С.Н. Современное состояние и перспективы развития технологии сферодоводки прецизионных узлов // Металлообработка. 2018. № 1 (103). С. 27–32.
4. Angele W. Finishing high precision quartz balls // Precision Engineering. 1980. V. 2. N 3. P. 119–122. [https://doi.org/10.1016/0141-6359\(80\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0141-6359(80)90025-2)
5. Marcelja F., DeBra D.B., Keiser G.M., Turneure J.P. Precision spheres for the Gravity Probe B experiment // Classical and Quantum Gravity. 2015. V. 32. N 22. P. 224007. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/22/224007>
6. Becker P., Schiel D. The Avogadro constant and a new definition of the kilogram // International Journal of Mass Spectrometry. 2013. V. 349–350. P. 219–226. <https://doi.org/10.1016/j.ijms.2013.03.015>
7. Федорович С.Н. Моделирование процесса доводки сферического ротора шарового гироскопа // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 4. С. 307–315. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2021-64-4-307-315>
8. Орлов П.Н. Технологическое обеспечение качества деталей методами доводки. М. Машиностроение, 1988. 383 с.
9. Бабаев С.Г., Садыгов П.Г. Притирка и доводка поверхностей деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. С. 6–15.
10. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
11. Амелкин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 63 с.
12. Фаркаш З., Бартельс Г., Вольф Д.Э., Унгер Т. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 1. С. 139–146. <https://doi.org/10.20537/nd1101007>
13. Khala M.J., Hare C., Wu C., Martin M.J., Venugopal N., Freeman T. The importance of a velocity-dependent friction coefficient in representing the flow behaviour of a blade-driven powder bed // Powder Technology. 2021. V. 385. P. 264–272. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.02.060>
14. Aublin M. Systèmes Mécaniques: Théorie et Dimensionnement. Dunod, 1993. 662 p.
15. Анфиногенов А.С., Парфенов О.И. Способ уменьшения деформаций внешней поверхности тонкостенных сферических роторов гироскопов // Морское приборостроение. 1969. № 1. С. 114–119.
16. Юльметова О.С. Ионно-плазменные и лазерные технологии в гироскопическом приборостроении: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. СПб., 2019. 220 с.

References

1. Landau B.E., Belash A.A., Gurevich S.S., Levin S.L., Romanenko S.G., Tsvetkov V.N. Electrostatic gyroscope in spacecraft attitude reference systems. *Gyroscopy and Navigation*, 2021, vol. 12, no. 3, pp. 247–253. <https://doi.org/10.1134/s2075108721030056>
2. Martynenko Y.G. *Motion of a Rigid Body in Electric and Magnetic Fields*. Moscow, Nauka Publ., 1988, 368 p. (in Russian)
3. Fedorovich S.N. Current state and perspectives for development of the technology of lapping of precision spherical system elements. *Metalworking*, 2018, no. 1 (103), pp. 27–32. (in Russian)
4. Angele W. Finishing high precision quartz balls. *Precision Engineering*, 1980, vol. 2, no. 3, pp. 119–122. [https://doi.org/10.1016/0141-6359\(80\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0141-6359(80)90025-2)
5. Marcelja F., DeBra D.B., Keiser G.M., Turneure J.P. Precision spheres for the Gravity Probe B experiment. *Classical and Quantum Gravity*, 2015, vol. 32, no. 22, pp. 224007. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/22/224007>
6. Becker P., Schiel D. The Avogadro constant and a new definition of the kilogram. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2013, vol. 349–350, pp. 219–226. <https://doi.org/10.1016/j.ijms.2013.03.015>
7. Fedorovich S. N. Modeling the process of finishing the spherical rotor of a ball gyroscope. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, vol. 64, no. 4, pp. 307–315. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2021-64-4-307-315>
8. Orlov P.N. *Technological Quality Assurance of Parts by Finishing Methods*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 383 p. (in Russian)
9. Babaev S.G., Sadygov P.G. *Lapping and Finishing of Machine Parts Surfaces*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, pp. 6–15. (in Russian)
10. Markeev A.P. *Theoretical Mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 414 p. (in Russian)
11. Amelkin N.I. *Kinematics and Dynamics of a Rigid Body*. Moscow, MIPT Publ., 2000, 63 p. (in Russian)
12. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 139–146. (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1101007>
13. Khala M.J., Hare C., Wu C., Martin M.J., Venugopal N., Freeman T. The importance of a velocity-dependent friction coefficient in representing the flow behaviour of a blade-driven powder bed. *Powder Technology*, 2021, vol. 385, pp. 264–272. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.02.060>
14. Aublin M. *Systèmes Mécaniques: Théorie et Dimensionnement*. Dunod, 1993, 662 p. (in French)
15. Anfinogenov A.S., Parfenov O.I., Method to reduce the deformations of the outer surface of thin-walled spherical rotors in gyroscopes. *Morskoe priborostroenie*, 1969, no. 1, pp. 114–119. (in Russian)
16. Yulmetova, O.S. *Ion-plasma and laser technologies in gyroscopic instrumentation*. Dissertation for the degree of doctor of technical sciences. St. Petersburg, 2019, 220 p. (in Russian)

Автор

Федорович Сергей Николаевич — начальник лаборатории, АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», Санкт-Петербург, 197046, Российская Федерация, <https://orcid.org/0009-0001-3147-9910>, fedorovichsn@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 12.05.2025
Одобрена после рецензирования 16.07.2025
Принята к печати 22.09.2025*

Author

Sergei N. Fedorovich — Chief of Laboratory, JSC Concern CSRI Elektropribor, Saint Petersburg, 197046, Russian Federation, <https://orcid.org/0009-0001-3147-9910>, fedorovichsn@gmail.com

*Received 12.05.2025
Approved after reviewing 16.07.2025
Accepted 22.09.2025*



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»