НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
сентябрь–октябрь 2025 Том 25 № 5 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
September–October 2025 Vol. 25 No 5 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

BRIEF PAPERS

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-996-998
УДК 514.124.1

Вычисление объема симплекса в барицентрических координатах в многомерном евклидовом пространстве

Марина Александровна Степанова✉

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, 191186, Российская Федерация

ratkebug@yandex.ru✉, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507

Аннотация

Представлено описание трех способов вычисления k-мерного объема k-мерного симплекса в n-мерном евклидовом пространстве ($n \geq k$) в канонической барицентрической системе координат. Первый способ основан на вычислении для n-мерного симплекса с помощью определителя барицентрической матрицы, столбцами которой являются барицентрические координаты вершин симплекса. Второй способ представляет вычисление объема для k-мерного симплекса с помощью определителя Кэли–Менгера через длины ребер симплекса, которые можно найти по барицентрическим координатам вершин. Третьим способом является вычисление с помощью определителя Грама для построенной по вершинам k-мерного симплекса системы векторов в (n + 1)-мерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова

барицентрическая система координат, барицентрическая матрица, базисный симплекс, объем симплекса

Ссылка для цитирования: Степанова М.А. Вычисление объема симплекса в барицентрических координатах в многомерном евклидовом пространстве // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 5. С. 996–998. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-996-998

Calculation of the volume of simplex in barycentric coordinates in a multidimensional Euclidean space

Marina A. Stepanova✉

Herzen University, Saint Petersburg, 191186, Russian Federation

ratkebug@yandex.ru✉, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507

Abstract

The paper describes three ways of calculating the k-dimensional volume of the k-dimensional simplex in the n-dimensional Euclidean space ($n \geq k$) in the canonical barycentric coordinate system. The first method is to calculate for the n-dimensional simplex using the determinant of the barycentric matrix, the columns of which are the barycentric coordinates of the simplex vertices. The second method is to calculate the volume for k-dimensional simplex using the Cayley–Menger determinant through the lengths of the simplex edges which can be found from the barycentric coordinates of the vertices. The third method is to compute using a Gram determinant for a system of vectors constructed from the vertices of a given simplex in a (n + 1)-dimensional Euclidean space.

Keywords

barycentric coordinate system, barycentric matrix, basic simplex, simplex volume

For citation: Stepanova M.A. Calculation of the volume of simplex in barycentric coordinates in a multidimensional Euclidean space. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 5, pp. 996–998 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-5-996-998

Во многих современных прикладных задачах используется барицентрическая система координат для определения положения одних объектов относительно других (базисных) объектов или при описании распределения долей объекта. Например, барицентрические координаты можно встретить в научных работах по проектированию расположения мобильных интеллектуальных устройств, в геологических исследованиях, в исследованиях свойств химических растворов, при моделировании цветного изображения, в исследованиях по обобщению классических задач механики, в классических задачах линейного программирования и других (например, [1–4]). С каждым годом область применения барицентрического метода расширяется.

Существует некоторый недостаток в вычислениях при применении барицентрических координат. Вычисления длин, площадей и объемов осуществляются с помощью перехода к декартовым или аффинным координатам, и очень редко производятся непосредственно в барицентрических координатах, и то в малой размерности (два или три). Основная цель настоящей работы — устранить упущение в вычислениях и получить явные формулы для расчета объемов симплексов.

Рассмотрим три способа вычислений k-мерного симплекса.

Пусть $\mathbb{E}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Зафиксируем в пространстве $\mathbb{E}^n$ каноническую барицентрическую систему координат с правильным базисным симплексом Δ, все ребра которого равны 1 [5–8]. Пусть P – k-мерный симплекс с вершинами C_1, C_2, …, C_{k+1} ($n \geq k$), и известны координаты точек C_j в барицентрической системе координат: C_j (x_{ij}), где $i = 1, \dots, n+1$; $j = 1, \dots, k+1$; $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_{ij} = 1$. Необходимо вычислить $V^{(k)}(P)$ — k-мерный объем симплекса P. Для канонической барицентрической системы координат в работах [6, 7] для случаев $n = 2$ и $n = 3$ получены формулы для косого, смешанного и векторного произведений векторов, следовательно, задача в этих размерностях решена.

Аналогичная задача для декартовой системы координат решена много лет назад: можно воспользоваться внешним произведением векторов или определителем Грама [9], либо определителем Кэли–Менгера [10–13].

В случае $k = n$ симплекс P можно считать базисным симплексом другой барицентрической системы координат, тогда $\mathbf{B} = (\mathbf{x}_{ij})$ — матрица перехода от симплекса Δ к симплексу P [14]. В работе [15] доказано, что $V^{(n)}(P) = V^{(n)}(\Delta)|\det \mathbf{B}|$, при этом $V^{(n)}(\Delta) = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n!2^{n/2}}$ [12, 16]. В результате получаем формулу:

$$V^{(n)}(P) = \frac{\sqrt{n+1}}{n!2^{n/2}}|\det\mathbf{B}|, \tag{1}$$

где в матрице $\mathbf{B}$ по столбцам заданы координаты вершин симплекса P.

Длина ребра C_lC_m симплекса P, как было показано в [5], вычисляется по формуле $|C_lC_m|^2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n+1}(x_{il} - x_{im})^2$. Рассчитаем по длинам ребер объем P с помощью определителя Кэли–Менгера, и получим:

$$[V^{(k)}(P)]^2 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k(k!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \cdots & d_{1\,k+1}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & \cdots & d_{2\,k+1}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & \cdots & d_{3\,k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d_{k+1\,1}^2 & d_{k+1\,2}^2 & d_{k+1\,3}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где $d_{lm}^2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n+1}(x_{il} - x_{im})^2$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{E}^n$ как гиперплоскость α в пространстве $\mathbb{E}^{n+1}$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ — вершины базисного симплекса Δ. Существует точка $O \notin \alpha$ такая, что $OA_i \perp OA_j$ ($i \neq j$) и $|OA_i|^2 = 1/2$. Введем аффинную систему координат в $\mathbb{E}^{n+1}$ с началом в точке O и с базисными векторами $\mathbf{a}_i = \mathbf{OA}_i$. В этой системе координат плоскость α задается уравнением $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1$. Заметим, что для любой точки $M \in \alpha$ ее барицентрические координаты в α совпадают с координатами радиус-вектора $\mathbf{OM}$ в базисе $\mathbf{a}_i$, и барицентрические координаты любого вектора, параллельного α, совпадают с его координатами в базисе $\mathbf{a}_i$. Матрица скалярного произведения (матрица Грама) в базисе $\mathbf{a}_i$ следующая: $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbf{E}_{n+1}$, где $\mathbf{E}_{n+1}$ — единичная матрица $(n+1)\times(n+1)$. Исходя из этого, скалярное произведение векторов $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ и $\mathbf{u} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ в данном базисе вычислим по формуле:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{2}\sum_i x_i y_i.$$

Симплекс P натянут на векторы $\mathbf{v}_j = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_{j+1}$ ($j = 1, \dots, k$) и $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{m=1}^{n+1}(x_{mj+1} - x_{m1})\mathbf{a}_m$. Пусть $(\mathbf{g}_{ij}) = (\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j)$ — матрица Грама векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Найдем объем симплекса P с помощью определителя матрицы Грама для векторов $\mathbf{v}_j$ [9, С. 315], тогда:

$$V^{(k)}(P) = \frac{1}{k!}\sqrt{\det(\mathbf{g}_{ij})}, \tag{3}$$

где $\mathbf{g}_{ij} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n+1}(x_{mi+1} - x_{m1})(x_{mj+1} - x_{m1})$.

Полученные формулы (1)–(3) для вычисления объемов симплексов могут расширить применение барицентрических координат и упростить вычисления в уже имеющихся математических моделях. Прежде всего, следует ожидать применение представленных формул в задачах оптимизации расположения объектов (например, при проектировании расположения устройств приема и преобразования сигналов), в расчетах, связанных с интерполяцией на многомерных объектах, при обработке статистических данных в многомерном случае, при обобщении классических задач линейного программирования.

Литература

1. Барышников В.Д., Качальский В.Г., Лудцев К.Б. Определение неизвестных точечных свойств массива горных пород методом интерполяции с использованием барицентрических координат // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2014. Т. 1. № 1. С. 51–55.
2. Кудрявченко И.В., Карлусов В.Ю. Измерение параметров движения мобильных объектов с «коллективным» поведением // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении. 2018. № 3 (3). С. 92–99.
3. Никонов В.И. Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2014. № 2. С. 45–51.
4. Степанова М.А. Применение барицентрических комбинаций точек в теории выпуклых многогранников // Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения: материалы II Российско-узбекской научно-практической конференции. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. С. 263–268.
5. Степанова МА., Малинникова К.С. Барицентрические матрицы и канонические барицентрические координаты в евклидовом пространстве // Современные проблемы математики и математического образования: Международная научная конференция «78 Герценовские чтения». СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2025. С. 360–364.
6. Понарин Я.П. Основные метрические задачи планиметрии в барицентрических координатах // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. № 4. С. 114–132.
7. Понарин Я.П. Метод барицентрических координат в метрических задачах стереометрии // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2004. № 6. С. 189–200.
8. Ungar A.A. Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry a Comparative Introduction. North Dakota State University, 2010. 360 p. https://doi.org/10.1142/7740
9. Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.
10. Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция длин его ребер // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 4. С. 305–307.
11. D'Andrea C., Sombra M. The Cayley-Menger determinant is irreducible for $n \geq 3$ // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46. N 1. P. 71–76. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0007-0
12. Fiedler M. Matrices and Graphs in Geometry. Cambridge University Press, 2011. 206 p.
13. Sabitov I.K. The volume as a metric invariant of polyhedra // Discrete and Computational Geometry. 1998. V. 20. N 4. P. 405–425. https://doi.org/10.1007/PL00009393
14. Степанова М.А. Барицентрическая система координат барицентрическая группа // Современные проблемы математики и математического образования: сборник научных трудов международной научной конференции. СПб: РГПУ им. А.И. Герцена, 2024. С. 356–360.
15. Степанова М.А. Геометрический смысл матрицы перехода от барицентрической системы координат к барицентрической системе координат // Актуальные аспекты развития науки и общества в эпоху цифровой трансформации: сборник материалов XX Международной научно-практической конференции. М.: АНО ДПО «Центр развития образования и науки», 2025. С. 428–433.
16. Buchholz R.H. Perfect Pyramids // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1991. V. 45. P. 353–368.

References

1. Baryshnikov V.D., Kachalsky V.G., Ludtsev K.B. Point estimation of unknown properties of rock mass using interpolation and barycentric coordinates. *Fundamental'nye i Prikladnye Voprosy Gornyh Nauk*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 51–55. (in Russian)
2. Kudryavchenko I.V., Karlusov V.Yu. Measurement of mobile objects motion parameters with "collective" behavior. *Automation and Measurement in Mechanical Engineering and Instrument Engineering*, 2018, no. 3 (3), pp. 92–99. (in Russian)
3. Nikonov V.I. Relative equilibria in the motion of a triangle and a point under mutual attraction. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2014, vol. 69, no. 2, pp. 44–50. https://doi.org/10.3103/S0027133014020034
4. Stepanova M.A. Barycentric point combinations and convex polyhedral. *Proc. of the 2nd Russian-Uzbek Scientific and Practical Conference*, 2024, pp. 263–268. (in Russian)
5. Stepanova M.A., Malinnikova K.S. Barycentric matrices and canonical barycentric coordinates in euclidean space. *Proc. of the Contemporary Problems of Mathematics and Mathematical Education*, 2025, pp. 360–364. (in Russian)
6. Ponarin Y.P. Basic metric problems of planimetry in barycentric coordinates. *Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities of the Volga-Vyatka Region*, 2002, vol. 4, pp. 114-132. (in Russian)
7. Ponarin Y.P. The method of barycentric coordinates in metric problems of stereometry. *Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities of the Volga-Vyatka Region*, 2004, no. 6, pp. 189–200. (in Russian)
8. Ungar A.A. *Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry a Comparative Introduction*. North Dakota State University, 2010, 360 p. https://doi.org/10.1142/7740
9. Berger M. *Géométrie. Action de Groupes, Espaces Affines et Projectifs*. Cedic/Fernand Nathan, 1979, 200 p. (in French)
10. Sabitov Kh. The polyhedron's volume as a function of length of its edges. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 305–307. (in Russian)
11. D'Andrea C., Sombra M. The Cayley-Menger determinant is irreducible for $n \geq 3$. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, no. 1, pp. 71–76. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0007-0
12. Fiedler M. *Matrices and Graphs in Geometry*. Cambridge University Press, 2011, 206 p.
13. Sabitov I.K. The volume as a metric invariant of polyhedral. *Discrete and Computational Geometry*, 1998, vol. 20, no. 4, pp. 405–425. https://doi.org/10.1007/PL00009393
14. Stepanova M. Barycentric coordinate system barycentric group. *Proc. of the 77th Herzen Readings*, 2024, pp. 356–360. (in Russian)
15. Stepanova M. The geometric meaning of the transition matrix from barycentric coordinate system to barycentric coordinate system. *Proc. of the 20th International Scientific and Practical Conference Current aspects of the development of science and society in the Era of Digital Transformation*, 2025, 428–433. (in Russian)
16. Buchholz R.H. Perfect Pyramids. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1991, vol. 45, pp. 353–368.

Автор

Степанова Марина Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, 191186, Российская Федерация, sc 8840198800, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507, ratkebug@yandex.ru

Author

Marina A. Stepanova — PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, Associate Professor, Herzen University, Saint Petersburg, 191186, Russian Federation, sc 8840198800, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507, ratkebug@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 07.07.2025
Одобрена после рецензирования 23.07.2025
Принята к печати 23.09.2025

Received 07.07.2025
Approved after reviewing 23.07.2025
Accepted 23.09.2025