НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
март–апрель 2024 Том 24 № 2 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
March–April 2024 Vol. 24 No 2 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283
УДК 519.63

Устойчивость высокоупругой прямоугольной пластинки с защемленно-свободными краями при одноосном сжатии

Михаил Васильевич Сухотерин[1]✉, Анна Анатольевна Сосновская[2]

[1,2] Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская федерация

[1] sukhoterinmv@gumrf.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089
[2] sosnovskayaaa@gumrf.ru, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783

Аннотация

Введение. Изучены симметричные формы потери устойчивости прямоугольной пластинки Кирхгоффа с двумя защемленными и двумя свободными параллельными гранями под действием распределенной сжимающей нагрузки, приложенной к защемленным граням. **Метод.** Функция прогибов пластинки при потере устойчивости представлена двумя гиперболо-тригонометрическими рядами с неопределенными коэффициентами, которые получены при точном удовлетворении всех условий краевой задачи. Проблема поиска сведена к решению однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности неопределенных коэффициентов, которая в качестве параметра содержит искомую критическую нагрузку. Для получения нетривиальных решений определитель системы должен быть равен нулю. Эта задача на собственные значения имеет бесчисленное множество решений. Нетривиальные решения системы предложено находить методом последовательных приближений с перебором параметра нагрузки. **Основные результаты.** С помощью компьютерных вычислений найдены первые четыре критические нагрузки (включая эйлерову), приложенные к защемленным параллельным граням квадратной пластинки и дающие симметричные формы потери устойчивости. Исследовано влияние количества членов, удерживаемых в рядах, и числа итераций на точность вычислений. Представлены 3D-изображения найденных форм потери устойчивости. Приведено сравнение с известными решениями. **Обсуждение.** Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных плоских прямоугольных элементов в микроэлектронике и нанотехнике.

Ключевые слова

прямоугольная пластинка, две параллельные стороны защемлены, две стороны свободные, критические нагрузки, гиперболо-тригонометрические ряды

Ссылка для цитирования: Сухотерин М.В., Сосновская А.А. Устойчивость высокоупругой прямоугольной пластинки с защемленно-свободными краями при одноосном сжатии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 276–283. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283

Stability of a highly elastic rectangular plate with clamped-free edges under uniaxial compression

Mikhail V. Sukhoterin[1]✉, Anna A. Sosnovskaya[2]

[1,2] Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation

[1] sukhoterinmv@gumrf.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089
[2] sosnovskayaaa@gumrf.ru, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783

Abstract

The symmetrical buckling modes of a rectangular Kirchhoff plate with two clamped and two free parallel faces (CFCF-plate) under the action of a distributed compressive load applied to the clamped faces have been studied. The function of plate deflections due to loss of stability is represented by two hyperbolic-trigonometric series with indefinite coefficients which are found when all conditions of the boundary value problem are exactly satisfied. The problem is

© Сухотерин М.В., Сосновская А.А., 2024

reduced to solving a homogeneous infinite system of linear algebraic equations with respect to one sequence of uncertain coefficients which contain the desired critical load as a parameter. To obtain nontrivial solutions, the determinant of the system must be equal to zero. This eigenvalue problem has countless solutions. It is proposed to find non-trivial solutions of the system using the method of successive approximations with enumeration of the load parameter. Using computer calculations, the first four critical loads (including the Euler load) were found applied to the clamped parallel faces of a square plate and giving symmetrical forms of buckling. The influence on the accuracy of calculations of the number of terms retained in the series and the number of iterations is studied. 3D images of the found buckling modes are presented. A comparison with known solutions is provided. The results obtained can be used in the design of various flat rectangular elements in microelectronics and nanotechnology.

Keywords
rectangular plate, CFCF-plate, critical loads, hyperbolic-trigonometric series

For citation: Sukhoterin M.V., Sosnovskaya A.A. Stability of a highly elastic rectangular plate with clamped-free edges under uniaxial compression. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 276–283 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283

Введение

Тонкие и сверхтонкие пластинки (мембраны) широко используются в микроэлектронике, smart-конструкциях, нанотехнологиях (нанопластинах) и т. д., а также в качестве чувствительных элементов различных датчиков (пьезоэлектрических или тензодатчиков микроэлектромеханических систем, снабженных сенсорами и актуаторами). Эти пластинки деформируются под воздействием внешних механических сил, электрических или магнитных полей и через актуаторы вызывают отклик управляющей системы. Современные высокоупругие материалы позволяют пластинке под действием возрастающих сжимающих сил в ее плоскости терять устойчивость несколько раз, меняя форму равновесия. Это может быть использовано для изменения управляющего сигнала.

По условиям опирания пластинки-датчики в основном подразделяются на: консольные пластинки (один край защемлен, остальные — свободные); пластинки, защемленные по всему контуру; пластинки, два противоположные края которых защемлены, а два другие свободные (CFFF-, CCCC-, CFCF-пластинки по общепринятому обозначению, C — Clamped, F — Free). В настоящей работе рассмотрены CFCF-пластинки, к защемленным граням которых приложены распределенные сжимающие нагрузки.

Обычно исследователи не идут дальше определения первой критической нагрузки (эйлеровой), считая ее разрушающей [1–7], поэтому существует мало работ [8–14], посвященных определению начального спектра критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости (форм закритического равновесия).

В работе [9] спектр критических нагрузок для CCCC-пластинки получен итерационным методом с использованием гиперболо-тригонометрических рядов, а в [11] — методом Галеркина с помощью полинома. В [10] рассмотрены CCCC-, CCSS- и CCCS-пластинки (S — свободно опертый край, «supported») при одноосном сжатии. Задача решена методом симплектической суперпозиции. Искомая функция прогибов представлена комбинациями тригонометрических и экспоненциальных функций. Работы [13, 14] посвящены исследованиям консольных пластинок. Спектр критических нагрузок получен методом последовательных приближений с перебором параметра нагрузки. Форма изогнутой поверхности выбиралась в виде гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам.

В [8, 12] исследована устойчивость прямоугольных нанопластинок в рамках нелокальной теории Эрингена (Eringen), которая рассматривает более сложное уравнение равновесия, чем в классической теории Кирхгоффа. В [8] использован метод конечных полос в сочетании с энергетическим методом. Для ортотропных пластинок с различным опиранием сторон (в том числе и для CFCF-пластинок) получены первые 6 критических нагрузок при двухосном сжатии. В работе [12] приведены аналитические решения для консольных нанопластин на упругом основании под действием плоского магнитного поля методом симплектической суперпозиции. Получены 6 критических нагрузок и соответствующих форм равновесия.

Для CFCF-пластинки при одноосном нагружении известны лишь эйлеровы нагрузки для различных отношений ее сторон [3, 15].

Цель настоящей работы — поиск с высокой точностью начального спектра критических нагрузок и форм равновесия CFCF-пластинки при одноосном сжатии методом последовательных приближений с использованием гиперболо-тригонометрических рядов. На каждой итерации все условия краевой задачи выполняются точно. Этот метод успешно применен в работах [13, 14, 16] для решения различных задач устойчивости и колебаний прямоугольных пластинок.

Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную CFCF-пластинку постоянной толщины, к защемленным граням которой в плоскости пластинки приложены равномерно распределенные сжимающие усилия интенсивностью T_X (рис. 1). Размеры пластинки $a \times b$. Требуется найти некоторый начальный спектр критических нагрузок и соответствующих форм равновесия в предположении, что материал пластинки обладает высокой упругостью.

Поместим начало координат в центр пластинки, оси направим параллельно ее сторонам.

В классической теории пластин (теория Кирхгоффа) дифференциальное уравнение равновесия при потере устойчивости от осевой сжимающей нагрузки имеет вид [17]:

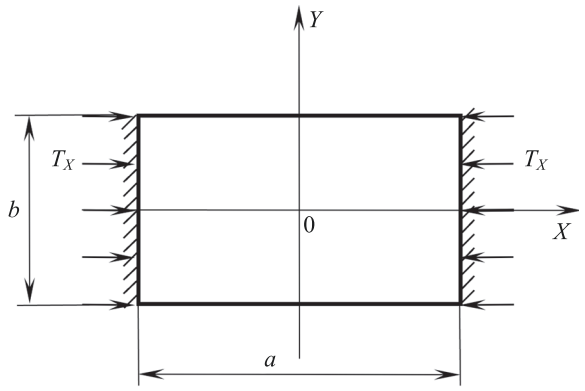

Рис. 1. CFCF-пластинка под действием сжимающих усилий в ее плоскости

Fig. 1. CFCF plate under the action of compressive forces in its plane

$$D\nabla^2\nabla^2 w(X, Y) + T_X \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0, \quad (1)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — жесткость пластинки при изгибе, E — модуль упругости материала, h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона; $\nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial X^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4}{\partial Y^4}$ — бигармонический оператор; $w(X, Y)$ — искомая функция прогибов, перпендикулярных исходной нейтральной плоскости пластинки.

Предположим, что размерность всех указанных физических величин соответствует международной системе единиц СИ.

Перейдем к относительным координатам $x = X/b$, $y = Y/b$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\nabla^2\nabla^2 w(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

где $T_x = T_X b^2/D$ — относительные (безразмерные) сжимающие усилия; $\nabla^2\nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$; размеры пластинки: $-\gamma/2 \le x \le \gamma/2$, $-1/2 \le y \le 1/2$ где $\gamma = a/b$ — отношение сторон пластинки.

На защемленных краях $x = \pm\gamma/2$ должны быть равны нулю прогибы и углы поворота [17]:

$$w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

а на свободных краях $y = \pm 1/2$ — изгибающие моменты M_y (отнесены к величине b/D) и перерезывающие силы V_y (отнесены к величине b^2/D):

$$M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$
$$V_y = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (4)$$

Математическая задача состоит в определении нетривиальной функции прогибов $w(x, y)$, удовлетворяющей уравнению изгиба (2) и граничным условиям (3), (4). Проблема заключается в поиске собственных значений — критических сжимающих усилий T_x, дающих соответствующие формы равновесия пластинки после потери устойчивости.

Отметим, что формы равновесия могут быть симметричными, антисимметричными и смешанными.

Определение симметричных форм равновесия

Первая (эйлерова) форма должна быть симметричной и соответствовать форме изгиба пластинки при действии на нее равномерного давления, поэтому искомая функция прогибов в данном случае должна содержать только четные функции.

Функцию $w(x, y)$ представим двумя гиперболо-тригонометрическими рядами:

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \mathrm{ch}(\alpha_k x)\cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} C_s \mathrm{ch}(\xi_s y)\cos(\mu_s x), \quad (5)$$

где A_k, C_s, α_k, ξ_s — коэффициенты, которые необходимо определить; $\lambda_k = 2\pi k$, $\mu_s = \pi s/\gamma$, $\tilde{s} = (s + 1)/2$, $k = 1,2,\ldots$, $s = 1,3,\ldots$.

Кроме эйлеровой нагрузки, найдем с помощью функции (5) и последующие критические нагрузки для симметричных форм равновесия.

Потребуем, чтобы каждый ряд функции (5) удовлетворял уравнению изгиба (2); тогда для определения коэффициентов α_k и ξ_s получим:

$$\alpha_k^4 - 2\alpha_k^2\lambda_k^2 + \lambda_k^4 + \alpha_k^2 T_x = 0,$$
$$\xi_s^4 - 2\xi_s^2\mu_s^2 + \mu_s^4 - \mu_s^2 T_x = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (6) найдем пары корней, зависящие от неизвестной критической нагрузки T_x:

$$\alpha_k = \sqrt{0{,}5[2\lambda_k^2 - T_x + \sqrt{T_x^2 - 4\lambda_k^2 T_x}]},$$
$$\beta_k = \sqrt{0{,}5[2\lambda_k^2 - T_x - \sqrt{T_x^2 - 4\lambda_k^2 T_x}]}, \quad (7)$$

$$\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \mu_s\sqrt{T_x}}, \ \eta_s = \sqrt{\mu_s^2 - \mu_s\sqrt{T_x}}. \quad (8)$$

Здесь для удобства через β_k и η_s обозначены соответственно вторые выражения коэффициентов α_k и ξ_s (отличаются знаками перед внутренним радикалом).

В силу четности функций отрицательные корни не учитывались. Заметим, что корни (7), (8) могут быть как действительными, так и комплексными, однако в итоге решение будет вещественным.

С учетом полученных значений β_k и η_s функции, входящие в формулу (5), перепишем в виде:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A_k \mathrm{ch}(\alpha_k x) + B_k \mathrm{ch}(\beta_k x))\cos(\lambda_k y), \quad (9)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} (C_s \mathrm{ch}(\xi_s y) + D_s \mathrm{ch}(\eta_s y))\cos(\mu_s x). \quad (10)$$

В выражения (9) и (10) добавлены слагаемые, содержащие неопределенные коэффициенты B_k и D_s.

Функция $w_2(x, y)$ «автоматически» удовлетворяет условию отсутствия прогибов на гранях $x = \pm\gamma/2$. Для того чтобы и функция $w_1(x, y)$ удовлетворяла этому условию, коэффициенты A_k и B_k должны быть связаны соотношением

$$B_k = -A_k \mathrm{ch}\alpha_k^*/\mathrm{ch}\beta_k^*,$$

где $\alpha_k^* = \alpha_k\gamma/2$; $\beta_k^* = \beta_k\gamma/2$.

Функция $w_1(x, y)$ аналогично удовлетворяет условию отсутствия перерезывающих сил на гранях $y = \pm 1/2$ (второе условие (4)). Требуя этого и от функции $w_2(x, y)$, получим:

$$C_s\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\xi_s^* + D_s\eta_s[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\eta_s^* = 0,$$

где $\xi_s^* = \xi_s/2$; $\eta_s^* = \eta_s/2$. Откуда

$$D_s = -\frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\xi_s^*}{\eta_s[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\eta_s^*}C_s.$$

Теперь искомая функция прогибов (5) будет содержать лишь две последовательности неизвестных коэффициентов A_k^* и C_s^*:

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k^*\left(\frac{\mathrm{ch}(\alpha_k x)}{\mathrm{ch}\alpha_k^*} - \frac{\mathrm{ch}(\beta_k x)}{\mathrm{ch}\beta_k^*}\right)\cos(\lambda_k y) + \\ + \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}C_s^* \times \\ \times\left(\frac{\mathrm{ch}(\xi_s y)}{\mathrm{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{ch}(\eta_s y)}{\eta_s[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\eta_s^*}\right)\cos(\mu_s x), \tag{11}$$

где $A_k^* = A_k\mathrm{ch}\alpha_k^*$; $C_s^* = C_s\mathrm{sh}\xi_s^*$.

Потребуем теперь, чтобы функция прогибов (11) удовлетворяла двум оставшимся граничным условиям (второе условие (3) и первое условие (4)). Тогда для свободных сторон пластинки получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k^*(\alpha_k\mathrm{th}\alpha_k^* - \beta_k\mathrm{th}\beta_k^*)\cos(\lambda_k y) + \\ + \sum\limits_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\mu_s C_s^* \times \\ \times\left(\dfrac{\mathrm{ch}(\xi_s y)}{\mathrm{sh}\xi_s^*} - \dfrac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{ch}(\eta_s y)}{\eta_s[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\eta_s^*}\right) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k^*\left(\left(\nu\alpha_k^2 - \lambda_k^2\right)\dfrac{\mathrm{ch}(\alpha_k x)}{\mathrm{ch}\alpha_k^*} - \left(\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2\right)\dfrac{\mathrm{ch}(\beta_k x)}{\mathrm{ch}\beta_k^*}\right) + \\ + \sum\limits_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}C_s^* \times \\ \times\left(\left(\xi_s^2 - \nu\mu_s^2\right)\mathrm{cth}\xi_s^* - \dfrac{\xi_s[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\eta_s[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} \times \right. \\ \left. \times\left(\eta_s^2 - \nu\mu_s^2\right)\mathrm{cth}\eta_s^*\right)\cos(\mu_s x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Преобразуем систему (12). Разложим в первом уравнении гиперболические функции в ряды Фурье по $\cos(\lambda_k y)$, а во втором уравнении — по $\cos(\mu_s x)$. В результате получим [15]:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\xi_s y) &= \frac{2\mathrm{sh}\xi_s^*}{\xi_s} + 4\xi_s\mathrm{sh}\xi_s^*\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \mathrm{ch}(\eta_s y) &= \frac{2\mathrm{sh}\eta_s^*}{\eta_s} + 4\eta_s\mathrm{sh}\eta_s^*\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\lambda_k y)}{\eta_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \mathrm{ch}(\alpha_k x) &= -\frac{4\mathrm{ch}\alpha_k^*}{\gamma}\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\mu_s\cos(\mu_s x)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2}, \\ \mathrm{ch}(\beta_k x) &= -\frac{4\mathrm{ch}\beta_k^*}{\gamma}\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\mu_s\cos(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

В первых двух формулах (13) имеются свободные члены, поэтому при подстановке в первое уравнение (12) также появится свободный член, который обозначим как

$$G = 2\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\mu_s}{\xi_s}\left(1 - \frac{\xi_s^2[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{\eta_s^2[\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}\right)C_s^*. \tag{14}$$

Компенсируем эту константу дополнительной функцией прогибов, зависящей только от координаты x

$$w_0(x) = R\cos(tx) + H, \tag{15}$$

где t, R, H — коэффициенты.

Для получения коэффициента t подчиним функцию (15) основному уравнению (2) задачи, тогда $t = \sqrt{T_x}$.

Коэффициенты R, H найдем из граничных условий на гранях $x = \pm\gamma/2$ с учетом появления свободного члена G:

$$\begin{cases} R\cos t^* + H = 0, \\ tR\sin t^* = G, \end{cases}$$

где $t^* = t\gamma/2$.

Отсюда

$$R = G/(t\sin t^*),\ H = -G\mathrm{ctg}t^*/t.$$

После преобразований получим вспомогательную функцию прогибов (15) в виде

$$w_0(x) = \frac{G[\cos(tx) - \cos t^*]}{t\sin t^*}. \tag{16}$$

С учетом первых двух формул (13) (без свободных членов) первое уравнение (12) примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k^*(\alpha_k\mathrm{th}\alpha_k^* - \beta_k\mathrm{th}\beta_k^*)\cos(\lambda_k y) + \\ + 4\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\mu_s\xi_s C_s^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \frac{\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2}{\eta_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2} \times \right. \\ \left. \times\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(\lambda_k y)}{\eta_s^2 + \lambda_k^2}\right) = 0.$$

Переставим знаки суммирования по индексам k и s и освободимся от знака суммирования по индексу k во всем выражении. В результате получим

$$(\alpha_k \mathrm{th}\alpha_k^* - \beta_k \mathrm{th}\beta_k^*)A_k^* + \\ + 4\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} \mu_s\xi_s\left(\frac{1}{\xi_s^2+\lambda_k^2} - \frac{\xi_s^2-(2-\nu)\mu_s^2}{\eta_s^2-(2-\nu)\mu_s^2}\frac{1}{\eta_s^2+\lambda_k^2}\right)C_s^* = 0. \quad (17)$$

На основании выражения (17) запишем

$$A_k^* = -\frac{4}{\alpha_k \mathrm{th}\alpha_k^* - \beta_k \mathrm{th}\beta_k^*} \times \\ \times \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} \mu_s\xi_s\left(\frac{1}{\xi_s^2+\lambda_k^2} - \frac{\xi_s^2-(2-\nu)\mu_s^2}{\eta_s^2-(2-\nu)\mu_s^2}\frac{1}{\eta_s^2+\lambda_k^2}\right)C_s^*. \quad (18)$$

Вспомогательная функция (16) порождает невязку по изгибающему моменту на гранях $y = \pm 1/2$:

$$M_{0y} = -\frac{vtG\cos(tx)}{\sin t^*}. \quad (19)$$

Воспользуемся разложением

$$\cos(tx) = -\frac{4\cos t^*}{\gamma}\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\mu_s\cos(\mu_s x)}{\mu_s^2 - t^2}.$$

Тогда невязка (19) примет вид

$$M_{0y} = \frac{4vtG}{\gamma}\mathrm{ctg}t^*\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\mu_s\cos(\mu_s x)}{\mu_s^2 - t^2}. \quad (20)$$

Подставим два последних разложения (13) во второе уравнение (12) и добавим невязку (20) от w_0:

$$\frac{4vtG}{\gamma}\mathrm{ctg}t^*\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\mu_s\cos(\mu_s x)}{\mu_s^2 - t^2} - \\ -\frac{4}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^*\left(\left(\nu\alpha_k^2 - \lambda_k^2\right)\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{s}}\mu_s\cos(\mu_s x)}{\alpha_k^2+\mu_s^2} - \right. \\ \left. -\left(\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2\right)\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{s}}\mu_s\cos(\mu_s x)}{\beta_k^2+\mu_s^2}\right) + \\ +\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}C_s^*\psi_s\cos(\mu_s x) = 0, \quad (21)$$

где

$$\psi_s = (\xi_s^2 - \nu\mu_s^2)\mathrm{cth}\xi_s^* - \frac{\xi_s[\xi_s^2-(2-\nu)\mu_s^2]}{\eta_s[\eta_s^2-(2-\nu)\mu_s^2]}\frac{\eta_s^2-\nu\mu_s^2}{\mathrm{th}\eta_s^*}.$$

Переставим в (21) знаки суммирования и освободимся от знака внешней суммы:

$$\frac{4vtG}{\gamma}\frac{\mathrm{ctg}t^*\mu_s}{\mu_s^2 - t^2} + \frac{4\mu_s}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^*\left(-\frac{\nu\alpha_k^2-\lambda_k^2}{\alpha_k^2+\mu_s^2} + \frac{\nu\beta_k^2-\lambda_k^2}{\beta_k^2+\mu_s^2}\right) + \\ + C_s^*\psi_s = 0. \quad (22)$$

Из выражения (22) получим разрешающую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_s^*:

$$C_s^* = -\frac{4\mu_s}{\gamma\psi_s}\left(\frac{vtG\mathrm{ctg}t^*}{\mu_s^2 - t^2} - \sum_{k=1}^{\infty}A_k^*\left(\frac{\nu\alpha_k^2-\lambda_k^2}{\alpha_k^2+\mu_s^2} - \frac{\nu\beta_k^2-\lambda_k^2}{\beta_k^2+\mu_s^2}\right)\right), \quad (23)$$

в которую затем из формулы (18) подставим коэффициенты A_k^*, а из формулы (14) — величину G. Полученная система (23) содержит в качестве параметра искомую критическую нагрузку $T_{\text{ккр}}$. Бесконечное множество собственных чисел (критических нагрузок) можно найти из условия равенства нулю определителя системы (23). Отметим, что в настоящей работе использовался более простой итерационный метод, описанный в работах [13, 14, 16], в сочетании с перебором параметра нагрузки (метод «стрельбы»).

Приведем окончательное выражение для функции прогибов пластинки:

$$w(x,y) = \frac{G[\cos(tx) - \cos t^*]}{t\sin t^*} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k^*\left(\frac{\mathrm{ch}(\alpha_k x)}{\mathrm{ch}\alpha_k^*} - \frac{\mathrm{ch}(\beta_k x)}{\mathrm{ch}\beta_k^*}\right)\cos(\lambda_k y) + \\ + \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}C_s^* \times \\ \times\left(\frac{\mathrm{ch}(\xi_s y)}{\mathrm{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s[\xi_s^2-(2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{ch}(\eta_s y)}{\eta_s[\eta_s^2-(2-\nu)\mu_s^2]\mathrm{sh}\eta_s^*}\right)\cos(\mu_s x).$$

Численные результаты. Обсуждение

Для вычисления критических усилий и получения 3D-форм потери устойчивости была составлена программа в среде аналитических вычислений MAPLE, реализующая алгоритм в разделе «Определение симметричных форм равновесия». Начальные значения коэффициентов C_s^*в формулах (14) и (18) приняты в виде последовательности $1/\mu_s^2$. Если перебором была определена нагрузка, при которой соответствующие коэффициенты соседних итераций A_k^* и C_s^* не отличались друг от друга (нетривиальное решение), то эта нагрузка считалась критической.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку. Коэффициент Пуассона принят равным 0,3. Число членов в рядах (размер редуцированной системы (23)) изменялось в контрольном варианте в широких пределах: 29, 59, 79, 99, 109, число итераций: 10, 15, 20, 25; число значащих цифр при вычислениях в среде MAPLE принято равным 10, 20, 30, 40. Окончательно при дальнейших расчетах в рядах удерживалось 99 членов, число итераций — 20, число значащих цифр — 30. Дальнейшее увеличение числа членов и итераций не изменяло шестую значащую цифру при вычислении соответствующих коэффициентов системы (23) в последней итерации по сравнению с предыдущей. В таблице представлены значения первых четырех критических нагрузок для симметричных форм потери устойчивости (форм равновесия), а сами формы приведены на рис. 2.

В работе [15, С. 304] приведена эйлерова нагрузка $4{,}03\cdot\pi^2 = 39{,}77$; в [3] соответствующее значение равно $3{,}984\cdot\pi^2 = 39{,}321$, что близко к полученному результату в настоящей работе, однако оба результата несколько завышены, так как в работах [15, 3] были использованы энергетические методы. Результат работы [3] следует считать более точным, чем [15], так как автор использовал метод конечных элементов (9-узловые конечные элементы), однако он менее точен, чем результат на-

Таблица. Критические относительные (безразмерные) сжимающие усилия $T_x = T_X b^2/D$ в квадратной пластинке для симметричных форм равновесия

Table. Critical relative compressive forces $T_x = T_X b^2/D$ in a square plate for symmetric forms of equilibrium

Результаты исследований	$T_{1Э}$	$T_{2кр}$	$T_{3кр}$	$T_{4кр}$
Настоящей работы	38,675	150,468	246,800	351,915
Работы [15]	39,770	—	—	—
Работы [3]	39,321	—	—	—

Примечание: точность значений для работ [15, 3] приведена в соответствии с авторскими текстами; знак прочерка означает, что соответствующие критические значения в указанных работах не вычислялись.

стоящей работы, ввиду того, что число этих элементов было всего 16. Критерием точности численных результатов следует считать точность выполнения всех условий задачи, которые в данном случае выполняются точно с использованием гиперболо-тригонометрических рядов и бесконечной разрешающей системы. Исходя из этого, увеличение точности самого вычислительного процесса связана только с анализом численных

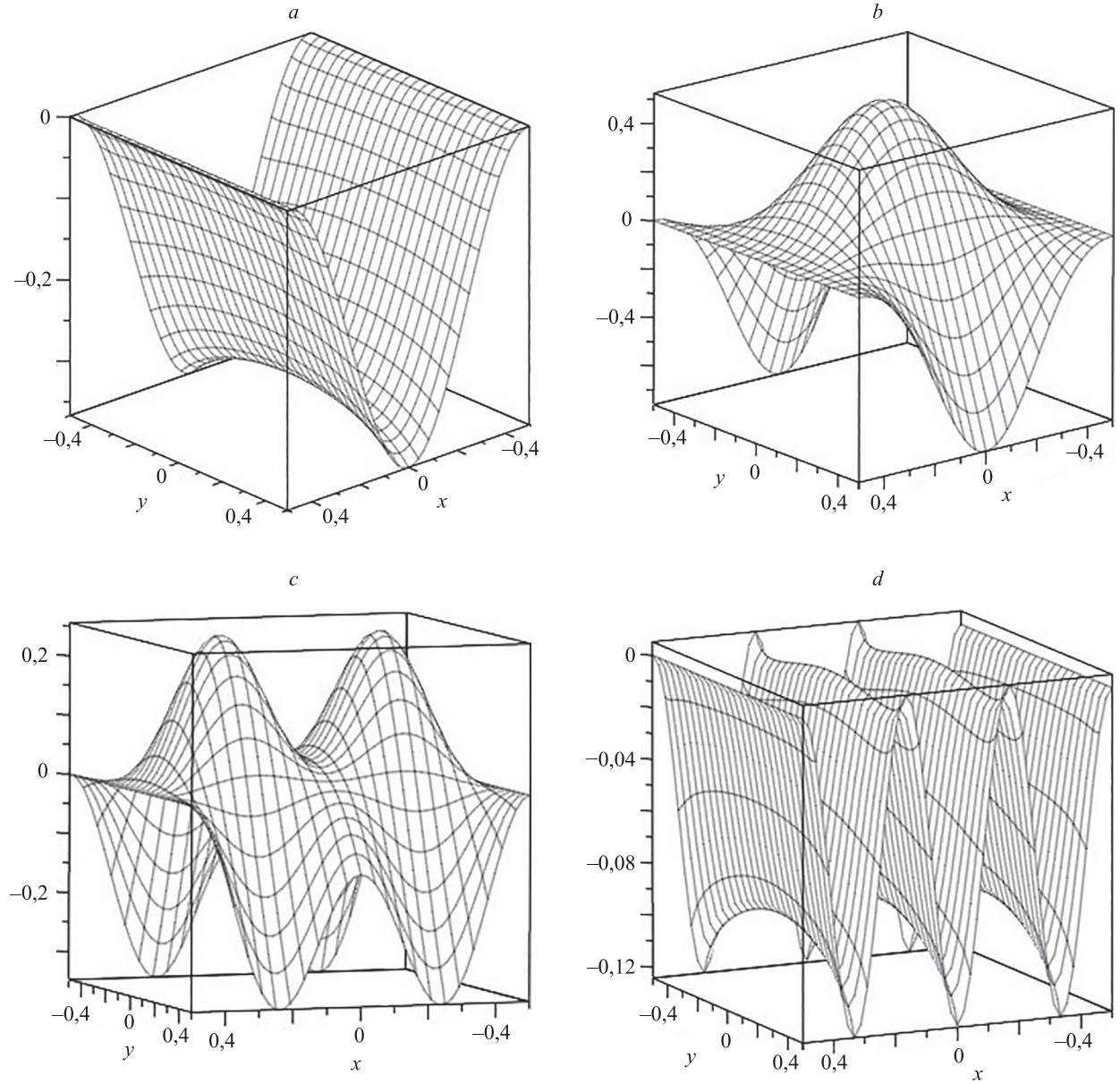

Рис. 2. Симметричные формы равновесия после потери устойчивости при критических нагрузках: $T_{1Э} = 38{,}675$ (*a*); $T_{2кр} = 150{,}468$ (*b*); $T_{3кр} = 246{,}800$ (*c*); $T_{4кр} = 351{,}915$ (*d*)

Fig. 2. Symmetrical forms of equilibrium after loss of stability under critical loads: $T_{1E} = 38.675$ (*a*); $T_{2cr} = 150.468$ (*b*); $T_{3cr} = 246.800$ (*c*); $T_{4cr} = 351.915$ (*d*)

результатов при увеличении размера редуцированной системы (число членов в рядах), числа итераций и количества значащих цифр в среде MAPLE.

Следует отметить, что в настоящее время нано- и микропластины рассчитываются на устойчивость и колебания по различным уточненным теориям (как линейным, так и нелинейным). При этом для проверки точности полученных приближенных решений исследователи используют в качестве эталонных результаты классической теории тонких пластин, дающие основной вклад в вычисленные значения критических нагрузок.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы в микроэлектронике и нанотехнологиях при проектировании и эксплуатации чувствительных элементов датчиков в виде прямоугольных пластинок, которые находятся под воздействием различных силовых полей (механических, электрических, магнитных) в плоскости пластинки. Увеличение сжимающей нагрузки может привести к потере устойчивости и вызвать соответствующую реакцию управляющей системы.

В настоящей работе исследованы только симметричные формы потери устойчивости. Антисимметричные и смешанные формы можно обнаружить при соответствующих сочетаниях четных и нечетных функций прогибов, поэтому для получения последовательного спектра критических усилий и форм следует в дальнейшем рассмотреть и эти случаи. Предполагается указанным методом исследовать и соответствующую задачу по уточненной теории.

Литература

1. Kshirsagar S., Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 314. N 3-5. P. 837–850. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.013
2. Civalek Ö. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns // Engineering Structures. 2004. V. 26. N 2. P. 171–186. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.09.005
3. Lee S.J. Buckling analysis of rectangular plates using an enhanced 9-node element // Architectural Research. 2016. V. 18. N 3. P. 113–120. https://doi.org/10.5659/AIKAR.2016.18.3.113
4. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2017. V. 28. N 11. P. 1472–1490. https://doi.org/10.1177/1045389x16672569
5. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular nanoplates // Composite Structures. 2019. V. 210. P. 822–830. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094
6. Tyukalov Yu.Ya. Method of plates stability analysis based on the moments approximations // Magazine of Civil Engineering. 2020. T. 95. № 3. С. 90–103. https://doi.org/10.18720/MCE.95.9
7. Tenenbaum J., Eisenberger M. Analytical solutions for plate buckling from static analysis approach // Analysis and Design of Plated Structures. Elsevier, 2022. P. 1–31. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-823570-6.00009-4
8. Analooei H.R., Azhari M., Heidarpour A. Elastic buckling and vibration analyses of orthotropic nanoplates using nonlocal continuum mechanics and spline finite strip method // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. N 10-11. P. 6703–6717. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.051
9. Анненков Л.В. Исследование устойчивости защемленной прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3(31). С. 48–53. https://doi.org/10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53
10. Wang B., Li P., Li R. Symplectic superposition method for new analytic buckling solutions of rectangular thin plates // International Journal of Mechanical Sciences. 2016. V. 119. P. 432–441. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.006
11. Onwuka D.O., Iwuoha S.E. Elastic instability analysis of biaxially compressed flat rectangular isotropic all-round clamped (CCCC) plates // MedCrave Online Journal of Civil Engineering. 2017. V. 2. N 2. P. 52–56. https://doi.org/10.15406/mojce.2017.02.00027
12. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2020. V. 8. N 4. P. 505–515. https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3

References

1. Kshirsagar S., Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 314, no. 3-5, pp. 837–850. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.013
2. Civalek Ö. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 2004, vol. 26, no. 2, pp. 171–186. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.09.005
3. Lee S.J. Buckling analysis of rectangular plates using an enhanced 9-node element. *Architectural Research*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 113–120. https://doi.org/10.5659/AIKAR.2016.18.3.113
4. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, vol. 28, no. 11, pp. 1472–1490. https://doi.org/10.1177/1045389x16672569
5. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular nanoplates. *Composite Structures*, 2019, vol. 210, pp. 822–830. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094
6. Tyukalov Yu.Ya. Method of plates stability analysis based on the moments approximations. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, vol. 95, no. 3, pp. 90–103. https://doi.org/10.18720/MCE.95.9
7. Tenenbaum J., Eisenberger M. Analytical solutions for plate buckling from static analysis approach. *Analysis and Design of Plated Structures*. Elsevier, 2022, pp. 1–31. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-823570-6.00009-4
8. Analooei H.R., Azhari M., Heidarpour A. Elastic buckling and vibration analyses of orthotropic nanoplates using nonlocal continuum mechanics and spline finite strip method. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 10-11, pp. 6703–6717. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.051
9. Annenkov L.V. Explore of stability of clamped rectangular plate, compressed in one direction. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova*, 2015, no. 3(31), pp. 48–53. (in Russian). https://doi.org/10.21821/2309-5180-2015-7-3-48-53
10. Wang B., Li P., Li R. Symplectic superposition method for new analytic buckling solutions of rectangular thin plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, vol. 119, pp. 432–441. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.006
11. Onwuka D.O., Iwuoha S.E. Elastic instability analysis of biaxially compressed flat rectangular isotropic all-round clamped (CCCC) plates. *MedCrave Online Journal of Civil Engineering*, 2017, vol. 2, no. 2, pp. 52–56. https://doi.org/10.15406/mojce.2017.02.00027
12. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 505–515. https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3

13. Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пастушок Е.М., Абдикаримов Р.А. Устойчивость упругой ортотропной консольной пластинки // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 38–52. https://doi.org/10.18721/JPM.14204
14. Sukhoterin M., Baryshnikov S., Knysh T., Rasputina E. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity // E3S Web of Conferences. 2021. V. 244. P. 04004. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202124404004
15. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев: Изд-во «Будівельник», 1973. 488 с.
16. Сухотерин М.В., Распутина Е.И., Пижурина Н.Ф. Смешанные формы свободных колебаний прямоугольной CFCF-пластины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23. № 2. С. 413–421. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421
17. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Гос. изд-во физ.-матем. литературы, 1963. 635 с.

13. Sukhoterin M.V., Knysh T.P., Pastushok E.M., Abdikarimov R.A. Stability of an elastic orthotropic cantilever plate. *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 38–52. (in Russian). htttp://doi.org/10.18721/JPM.14204
14. Sukhoterin M., Baryshnikov S., Knysh T., Rasputina E. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 244, pp. 04004. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202124404004
15. Weinberg D.V. *Handbook of strength, stability and vibrations of plates*. Kiev, Budivelnik Publ., 1973, 488 p. (in Russian)
16. Sukhoterin M.V., Rasputina E.I., Pizhurina N.F. Mixed forms of free oscillations of a rectangular CFCF-plate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 413–421 (in Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421
17. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959, 580 p.

Авторы

Сухотерин Михаил Васильевич — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, sc 16496923700, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089, sukhoterinmv@gumrf.ru

Сосновская Анна Анатольевна — старший преподаватель, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Authors

Mikhail V. Sukhoterin — D.Sc., Associate Professor, Head of Department, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation, sc 16496923700, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089, sukhoterinmv@gumrf.ru

Anna A. Sosnovskaya — Senior Lecturer, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint Petersburg, 198035, Russian Federation, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 09.01.2024
Одобрена после рецензирования 23.01.2024
Принята к печати 14.03.2024

Received 09.01.2024
Approved after reviewing 23.01.2024
Accepted 14.03.2024

Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»